Carpeta de Matemática 1
Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 3

Nueva carpeta de Matemática IV

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa
Nora Legorburu - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

4. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones lineales 3
Revisión inicial 4
Sistemas de ecuaciones lineales 5
Método de igualación 6
Método de sustitución 7
Método de reducción por sumas y restas 8
Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales 10
Inecuaciones lineales en el plano cartesiano 12
Sistemas de inecuaciones lineales 14
Programación lineal 17
En el mundo real 19
Los problemas de encuentro 19
Las ecuaciones lineales y el punto de equilibrio 20
Más actividades 21
Autoevaluación 24

5. Funciones cuadráticas 25
Revisión inicial 26
El modelo cuadrático 27
La función cuadrática 28
Variaciones en la gráfica de la función cuadrática 31
Forma canónica de la función cuadrática 33
Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
Máximos y mínimos 35
Conjuntos de positividad y de negatividad. Ceros 37
Ecuaciones cuadráticas 38
En el mundo real 41
Las parábolas y el atletismo 41
El índice de masa corporal 41
Más actividades 43
Autoevaluación 46
Actividades integradoras 47

AIQUE

Este CUADERNILLO 3 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática IV.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

COPIEDICIÓN
Maricel Besse

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
María Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Estudio DOBLEVUELO

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Ivana Dodero en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0076-3
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática IV / Carlos Abdala...[et.al.]. ; adaptado por Ruth Schaposchnik. - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
192 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0076-3

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, adapt.
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en marzo de 2008 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

4 SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES LINEALES

En muchos problemas matemáticos, intervienen más de una variable que se relacionan según un modelo lineal. Cada grupo de dos o más de esas relaciones referidas a un mismo fenómeno, y que deben verificarse simultáneamente, conforma un *sistema de ecuaciones lineales*.

En otros casos, las relaciones entre las variables determinan restricciones y sólo pueden expresarse mediante desigualdades; entonces, se puede plantear un *sistema de inecuaciones lineales*.

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Resuelvan los siguientes problemas planteando previamente una ecuación en cada caso.

a) Un fabricante de rodados tiene que entregar un pedido de 58 triciclos y cierta cantidad de bicicletas infantiles (todos los rodados del mismo tamaño). Calcula que necesita, en total, 256 ruedas para completar el pedido. ¿Cuántas bicicletas le pidieron?

.....

b) La suma de las edades de 4 amigos es 60. Sandra tiene un año menos que los mellizos, y Alan tiene un año más que ellos. ¿Qué edad tiene cada chico?

.....

2 Inventen, para cada una de las siguientes ecuaciones, un problema que pueda resolverse con ellas.

a) $0{,}5x + 12 = x + 2$

b) $3p - 8 = 4p - 14$

3 Entre las tres rectas cuyas ecuaciones se dan a continuación, hay un par de paralelas.

L_1: $y + 1 = x$; L_2: $2x - 2y = 3$; L_3: $y + x = -2$

a) Identifiquen el par de rectas paralelas.

b) Representen las tres rectas en un mismo sistema cartesiano y verifiquen la respuesta anterior.

c) Anoten las coordenadas de los puntos de intersección de cada recta con los ejes cartesianos.

4 Hallen, en cada caso, todos los valores de x que cumplen con las siguientes condiciones.

a) $x \in \mathbb{Z} / |x| < 5$

.....

b) $x \in \mathbb{R} / |x| > 5$

.....

c) $x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 5$

.....

d) $x \in \mathbb{R} / x \geq -2$

.....

5 Indiquen tres pares de puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas se relacionen de la manera indicada en cada caso.

a) $2x + 3y = 1$

.....

.....

.....

b) $y - 3x > 4$

.....

.....

.....

c) $y = 5x - 1$

.....

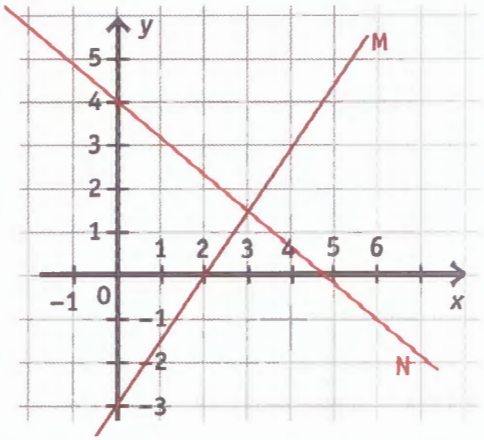
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Sistemas de ecuaciones lineales

6 Observen las rectas M y N graficadas a continuación.



a) Escriban la ecuación de cada una.

.....

b) Hallen la ordenada exacta del punto de intersección de las dos rectas. (Consideren que, para la abscisa de ese punto, se obtiene el mismo valor de y con ambas ecuaciones).

.....

c) Anoten las coordenadas del punto de intersección y verifiquen el valor obtenido reemplazando en ambas ecuaciones.

.....

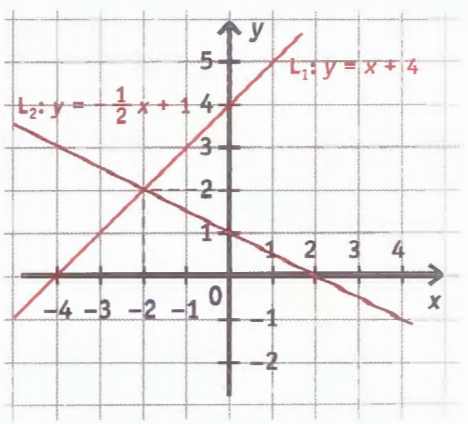
Para leer y recordar

- **Dos o más ecuaciones consideradas en forma simultánea forman un *sistema de ecuaciones*.**
- **Si las ecuaciones de un sistema pueden reducirse a la forma $y = ax + b$; es decir, si pueden representarse mediante rectas, forman un *sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*.**
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales es hallar las coordenadas del punto, si existe, que tienen en común ambas rectas.**

Por ejemplo, en el gráfico están representadas las rectas asociadas al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

Para indicar que las ecuaciones forman un sistema, se las agrupa con una llave.



El conjunto solución de este sistema es $S = \{(-2; 2)\}$, que son las coordenadas del punto de intersección de L_1 y L_2.
También puede expresarse: $S = \{x = -2; y = 2\}$

7 Escriban un sistema de ecuaciones lineales para cada una de las siguientes situaciones, representen el par de rectas y obtengan las coordenadas del punto de intersección.

a) Dos números, sumados, dan 10, y esos mismos números, restados, dan 4. ¿Cuáles son?

b) Si al doble de un número se le suma el triple de otro, se obtiene 31, pero si al triple del primero se le resta el doble del segundo, se obtiene 1. ¿De qué números se trata?

c) Un número es 9 unidades mayor que el número que se obtiene al permutar sus dos cifras, y la suma de sus cifras es 3. ¿De qué número se trata?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Método de igualación

Para observar

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos aplicar el *método de igualación*, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases}$$

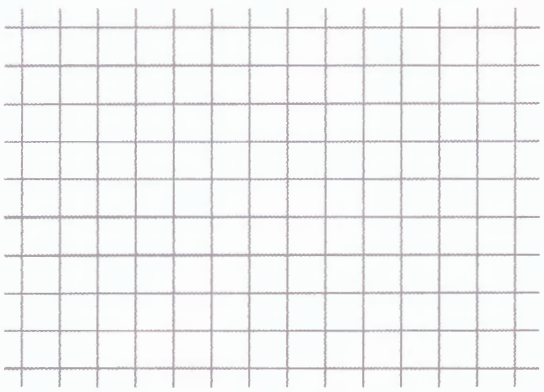
$3x + y = -3$ $y = -3 - 3x$ (I) $4x - 2y = -14$ $y = 7 + 2x$ (II)	Despejamos la misma variable en ambas ecuaciones.
$-3 - 3x = 7 + 2x$	Igualamos (I) y (II).
$-3x - 2x = 7 + 3$ $-5x = 10$ $x = -2$	Resolvemos la ecuación que obtuvimos y hallamos x.
$y = 7 + 2 \cdot (-2)$ $y = 3$	Reemplazamos en (I) o en (II) para hallar y. El conjunto solución que obtuvimos $S = \{(-2; 3)\}$.
$3(-2) + 3 = -3$ $4(-2) - 2 \cdot 3 = -14$	Verificamos que la solución sea correcta reemplazando esos valores en las ecuaciones originales.

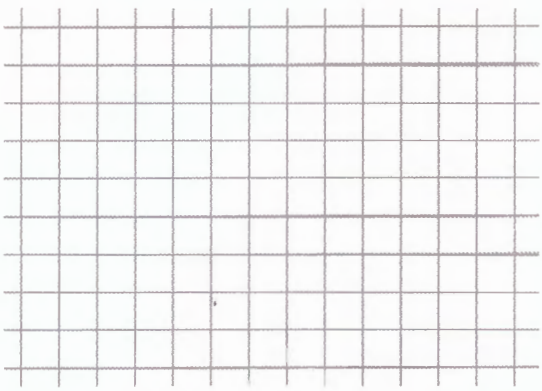
8 Resuelvan por igualación los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ 3x + 4y = 27 \end{cases}$

9 Verifiquen gráficamente las respuestas de la actividad 8.





© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Método de sustitución

Para observar

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$

Para resolver este sistema de ecuaciones aplicando el *método de sustitución*, hacemos así:

$2x + y = 2$

$y = 2 - 2x$ (I)

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones.

$3x - 2(2 - 2x) = -11$

$3x - 4 + 4x = -11$

$3x + 4x = -7$

$7x = -7$

$x = -1$

Sustituimos la expresión (I) en la otra ecuación del sistema. Resolvemos la nueva ecuación y hallamos x.

$y = 2 - 2(-1)$

$y = 4$

Reemplazamos en (I) el valor de x que obtuvimos, y hallamos y. El conjunto solución es $S = \{(-1; 4)\}$.

$2(-1) + 4 = 2$

$3(-1) - 2 \cdot 4 = -11$

Verificamos que la solución sea correcta reemplazando esos valores en las ecuaciones originales.

10 Resuelvan por sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 4x - 3y = -13 \\ 3x + 5y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x = 4 + 8y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0 \end{cases}$

11 Verifiquen gráficamente las respuestas de la actividad 10.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Método de reducción por sumas y restas

Para observar

- Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un mismo número, la ecuación que se obtiene es equivalente a la primera.
- Esta propiedad permite utilizar, en los casos en que sea conveniente, el *método de reducción por sumas y restas*, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -\frac{1}{2}x + 4y = 4 \end{cases}$$

$\left(-\frac{1}{2}x + 4y = 4\right) . 2$

$-x + 8y = 8$

Multiplicamos la segunda ecuación por 2. Obtenemos otra ecuación equivalente a la anterior.

$$\begin{array}{r} x + 2y = -3 \\ -x + 8y = 8 \\ \hline 10y = 5 \end{array}$$

Sumamos las dos ecuaciones. Como se anula x, se obtiene una ecuación con una sola incógnita, y.

$y = \frac{1}{2}$

Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de y.

$x + 2 . \frac{1}{2} = -3$

$x + 1 = -3$

$x = -4$

Reemplazamos ese valor en una de las ecuaciones originales, resolvemos y obtenemos el valor de x. El conjunto solución del sistema es $S = \left\{\left(-4; \frac{1}{2}\right)\right\}$

- Este mismo sistema podría haberse resuelto multiplicando por (−2) la primera ecuación y eliminando la y.

Este método resulta especialmente útil para resolver sistemas en los que:

- Los coeficientes de la misma incógnita son opuestos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \longrightarrow$$ Se suman las dos ecuaciones, y se elimina la y.

- Los coeficientes de una misma incógnita son iguales. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \longrightarrow$$ Se restan las dos ecuaciones, y se elimina la x.

12 Resuelvan por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 22 \\ 5x - 3y = -8 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

13 Planteen los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes y resuelvan los siguientes problemas:

a) En un laboratorio, quieren obtener un litro de solución salina al 70% y, para ello, mezclan el contenido de un recipiente A, con solución al 50%, y el de otro recipiente B, que contiene solución al 80%. ¿Qué cantidad deben incluir de cada recipiente?

.....

.....

b) Dos turistas pagan por el mismo artículo 70 y U$S90, respectivamente. Luego cambian un billete de 100 y otro de U$S100, a la misma cotización anterior, y reciben en total $640. ¿Cuál fue la cotización de cada divisa?

.....

.....

c) En abril, Hilda compró 15 diarios y dos ejemplares de su revista favorita y gastó $29,50. Ese mismo mes, Lucila compró 20 diarios y 3 ejemplares de la misma revista y gastó $40,50. Si los diarios eran todos de igual precio, ¿cuánto cuesta cada artículo?

.....

.....

d) Lean el siguiente diálogo entre Nora y su padre.
Nora. —Papá, dentro de diez años, tendrás el doble de mi edad.
José. —Es cierto, y hace diez años, tenía el triple de tu edad.
¿Qué edad tiene cada uno, actualmente?

.....

.....

e) Un número entero es tal que la suma de sus dos cifras es 6, y si se suma 6 a su triple, se obtiene otro con las mismas cifras originales invertidas. ¿De qué número se trata?

.....

.....

f) Dos números suman 84. Si se divide al mayor por 3 y al menor por 4, la diferencia entre los cocientes es 14. ¿De qué números se trata?

.....

.....

g) Ana vendió dos cuadros en $800 y había pagado $700 por ambos. En la venta de uno, ganó 20%, y en la del otro, 10%. ¿Cuánto había pagado por cada uno?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

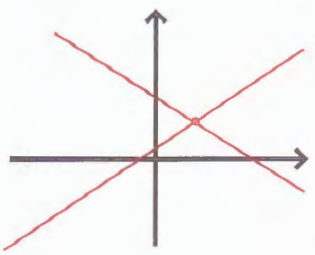
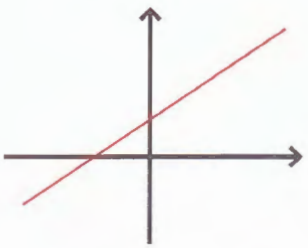
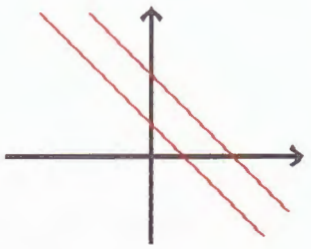
Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

14 Tracen las rectas asociadas a cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Qué particularidad observan?

a) $\begin{cases} 5x - 7y = -3 \\ -15x + 21y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Para leer y recordar

- Cada vez que resolvamos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y lo representemos gráficamente asociando una recta a cada una de las ecuaciones, nos encontraremos con alguno de estos tres casos.

Sistema compatible determinado	*Sistema compatible indeterminado*	*Sistema incompatible*
		
Las rectas se cortan en un punto. *La solución es única.*	Las dos ecuaciones están asociadas a la misma recta, o dicho de otra forma, a dos rectas que tienen infinitos puntos en común. *Tiene infinitas soluciones.*	Las rectas son paralelas y, por lo tanto, no tienen ningún punto en común. *El sistema no tiene solución.*

- Al intentar resolver un sistema indeterminado, obtenemos una expresión del tipo: $0 \cdot x = 0$.
Al intentar resolver un sistema incompatible, obtenemos una expresión del tipo: $0 \cdot x = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

15 Inventen un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, para cada uno de estos casos.

a) Que sea incompatible.

b) Que sea compatible indeterminado.

16 Clasifiquen los siguientes sistemas de ecuaciones. Verifiquen gráficamente en sus carpetas.

a) $\begin{cases} 6x - 15 = -12y \\ x + 2y = \frac{5}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 1 = \frac{1}{3}y \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2 - x = -y \\ x + y = 1 \end{cases}$

....

....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

17 Resuelvan los siguientes problemas, cuando sea posible, y cuando no lo sea, expliquen por qué.

a) La diferencia entre dos números es 5,9, y el triple de la diferencia entre el menor y el mayor de ellos es –177. ¿De qué números se trata?

.....

.....

b) Yago está ahorrando para comprarse una bicicleta que cuesta $210. Junta billetes de $2 y de $5. Ya tiene 33 billetes, que equivalen a la mitad del dinero que necesita. ¿Cuántos billetes de cada clase tiene?

.....

.....

c) Amalia junta billetes de $10 y de $5. Tenía $120, le dio la mitad de los billetes de $5 a su hermano, y le quedaron, en total, 12 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase tenía?

.....

.....

d) A la Convención Anual de la Asociación de Paseadores de Perros, cada asociado asiste con su grupo de "paseados". Al ingresar, cada asistente deja sus huellas en un cartón. Este año, un miembro del Comité Organizador contó 182 huellas, entre pies y patas, y 49 asistentes. ¿Cuántos paseadores y cuántos perros había?

.....

.....

e) En una ciudad, el suministro de energía eléctrica se factura a razón de $0,09 el kw/h más un cargo fijo bimestral de $5. Este bimestre, la familia Varela gastó $9 más que la familia Cepeda, y entre las dos familias consumieron 700 kw/h. ¿Cuántos kilovatios por hora consumió cada familia?

.....

.....

18 Completen los siguientes sistemas para que la solución, en cada caso, sea (–1; 1).

a) $\begin{cases} 3x - 1{,}5y = \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2{,}5x + \ldots\ldots y = 2 \\ \ldots\ldots x + 2y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + \ldots\ldots y = \ldots\ldots \\ 2x - \ldots\ldots y = \ldots\ldots \end{cases}$

¿Es única la respuesta en todos los casos?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Inecuaciones lineales en el plano cartesiano

19 Consideren los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación.

P = (1; 1) M = (1; −2) N = (1; 2) R = (−3; −1) S = (0; −5)

a) ¿Para cuáles de ellos, la ordenada es el opuesto de la abscisa, más 2?

b) ¿Para cuáles de ellos, la ordenada es menor que el triple de la abscisa menos 4?

c) ¿Para cuáles de ellos, la ordenada es mayor o igual que el doble de la abscisa?

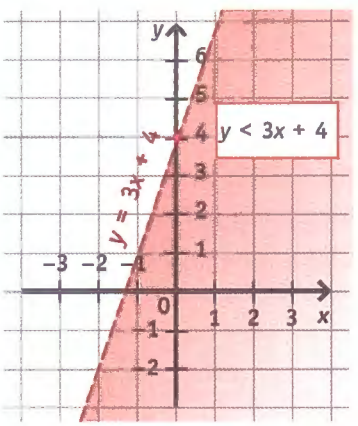
20 En un mismo par de ejes cartesianos:

a) Señalen con el color indicado los puntos que cumplen con las condiciones que se piden.
- Con rojo: cinco puntos $(x; y)$ tales que $y = 2x - 1$.
- Con verde: cinco puntos $(x; y)$ tales que $y > 2x - 1$.
- Con azul: cinco puntos $(x; y)$ tales que $y < 2x - 1$.

b) Utilicen los mismos colores para marcar *todos* los puntos que cumplen con esas condiciones.

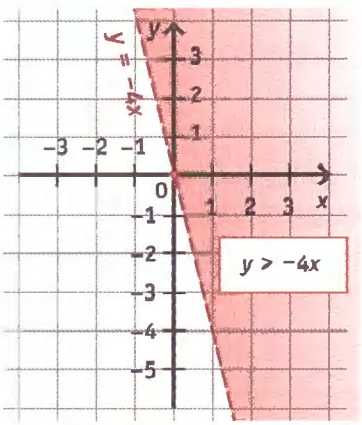
Para observar

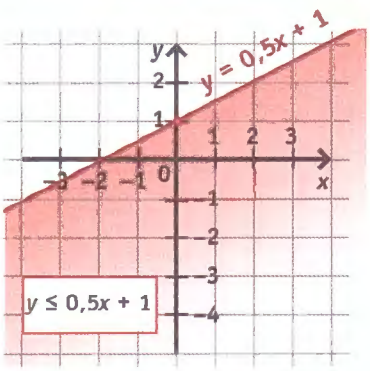
El conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas verifican una inecuación lineal de dos variables, constituyen un semiplano.



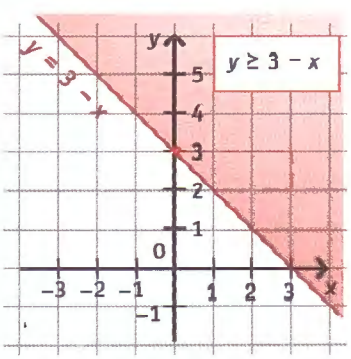
Observen los ejemplos.

En estos casos, los puntos de la recta borde no pertenecen al conjunto solución; por eso, marcamos esta recta con línea punteada.





En estos casos, los puntos de la recta borde pertenecen al conjunto solución; entonces, la trazamos con línea llena.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

21 Representen gráficamente el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $y > -3x + 2$

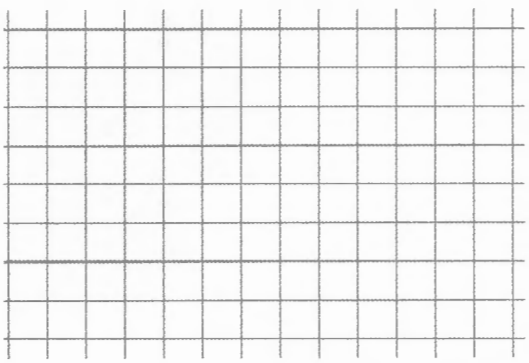
b) $y \leq \frac{1}{2}x - 1$

c) $y - x \geq -3$

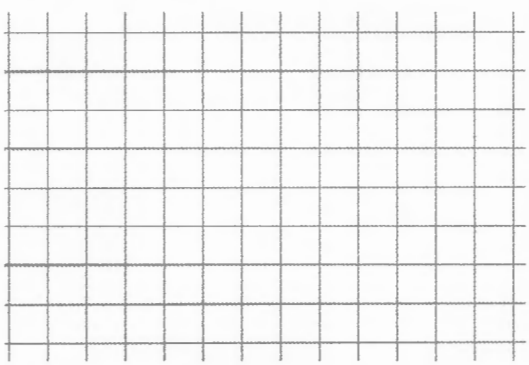
d) $2y + x < 1$

22 Hallen el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen la condición pedida, en cada caso.

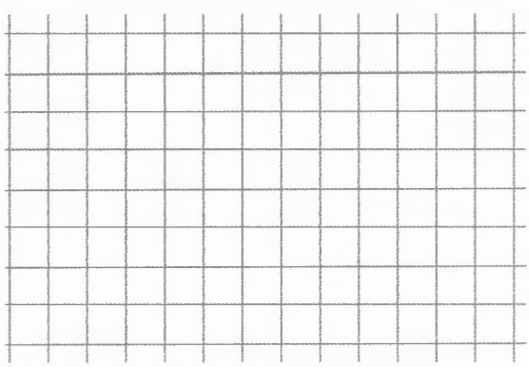
a) Su abscisa es mayor que su ordenada.



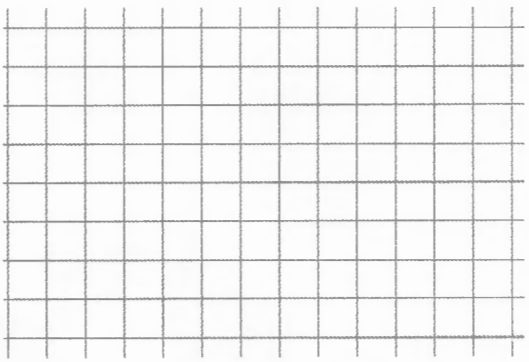
b) Su ordenada es menor o igual que 5.



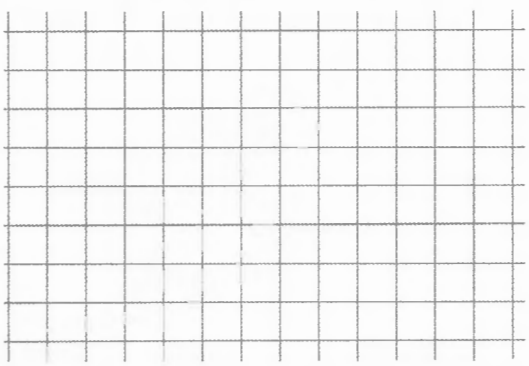
c) Sus coordenadas son positivas.



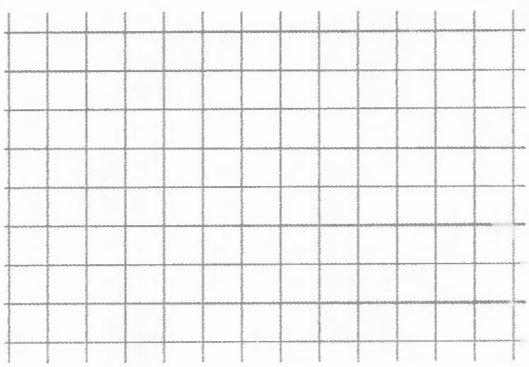
d) Su abscisa y su ordenada tienen el mismo signo.



e) Su ordenada es mayor que el valor absoluto de su abscisa.



f) El doble de su abscisa es menor o igual que la mitad de su ordenada.



© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

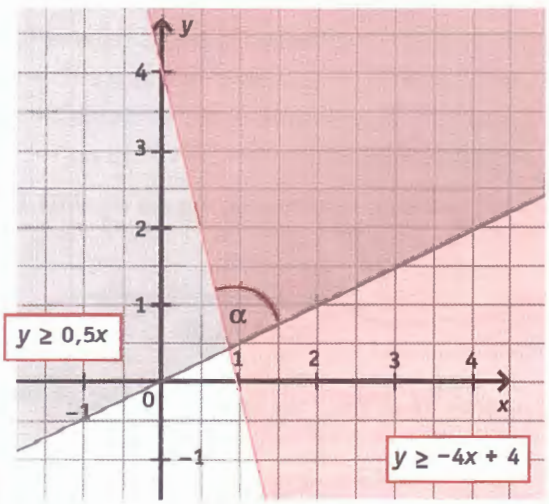
Sistemas de inecuaciones lineales

Para leer y recordar

El conjunto solución de un *sistema de inecuaciones* es la región del plano que contiene a todos los puntos que satisfacen simultáneamente a todas las inecuaciones.

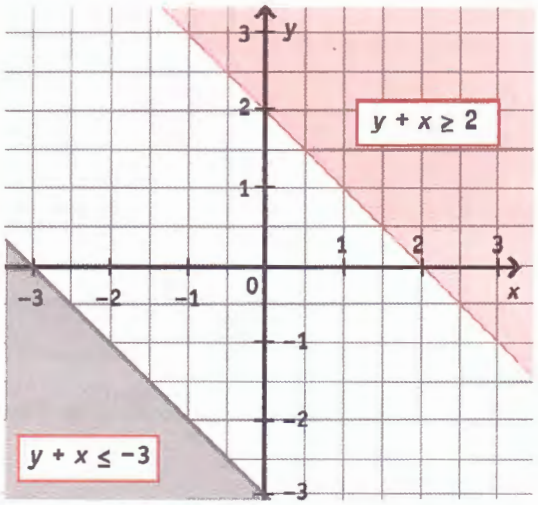
Por ejemplo:

$$\begin{cases} y \geq -4x + 4 \\ y \geq 0{,}5x \end{cases}$$



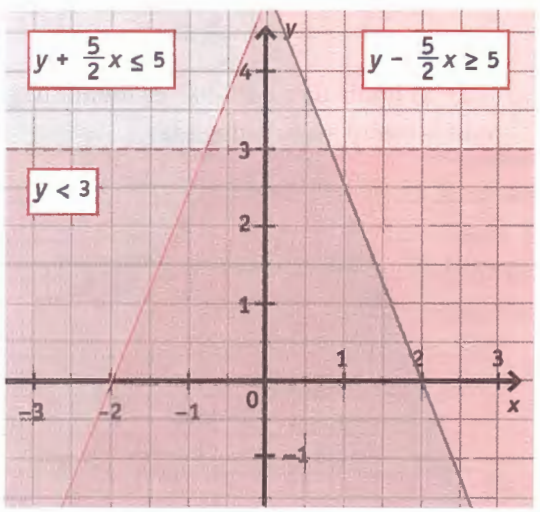
El conjunto solución es la zona común a los dos semiplanos. $S = \hat{\alpha}$

$$\begin{cases} y + x \geq 2 \\ y + x \leq -3 \end{cases}$$

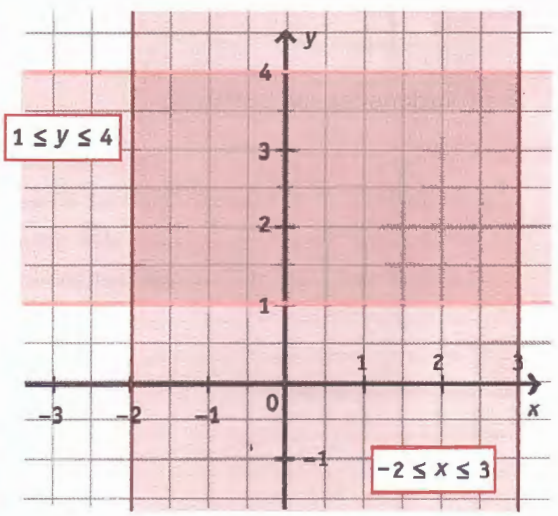


Los dos semiplanos no tienen puntos en común; por lo tanto, el conjunto solución no tiene elementos. $S = \emptyset$

$$\begin{cases} y + \frac{5}{2}x \leq 5 \\ y - \frac{5}{2}x \geq 5 \\ y < 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

23 Representen los siguientes sistemas de inecuaciones y destaquen en el gráfico el conjunto solución de cada uno, cuando sea posible.

a) $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y + 3 \geq x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq 1 \\ y + 2x < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x \leq 2 \\ y > 0 \\ y + x \leq 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y + 1{,}5x < 3 \\ y + 1{,}5x > -3 \end{cases}$

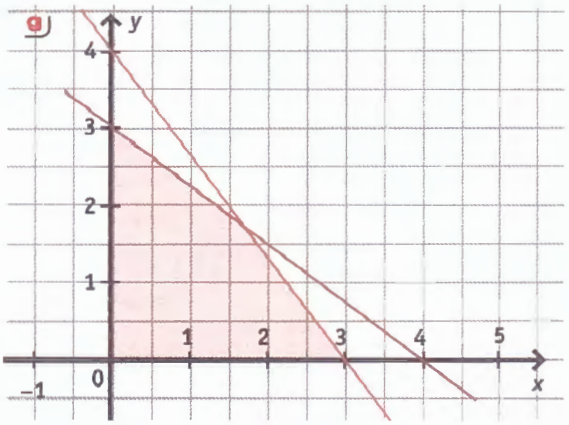
c) $\begin{cases} y > 2 \\ y < -2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y \geq x \\ x + y \geq 5 \\ y \leq 4 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

24 Hallen, en cada caso, el sistema de inecuaciones que define la zona sombreada.

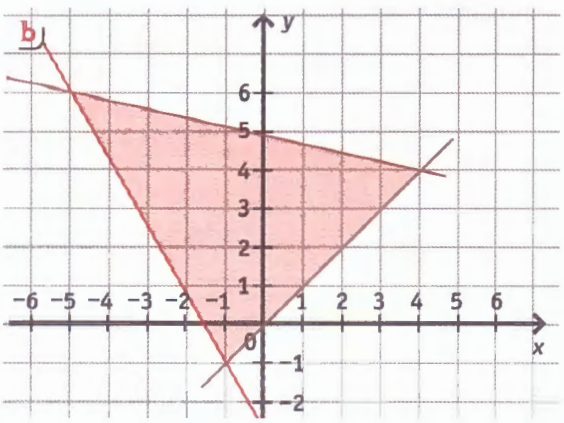
a)



.....

.....

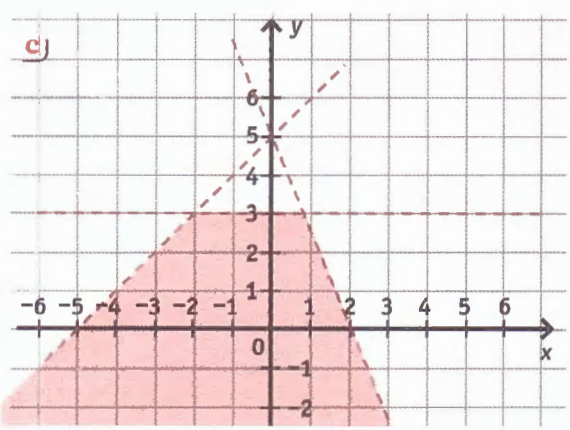
b)



.....

.....

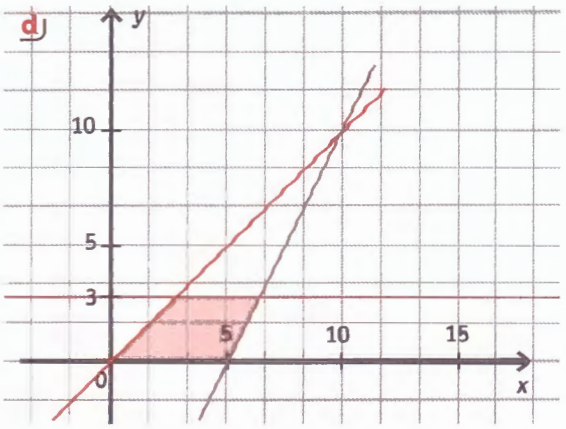
c)



.....

.....

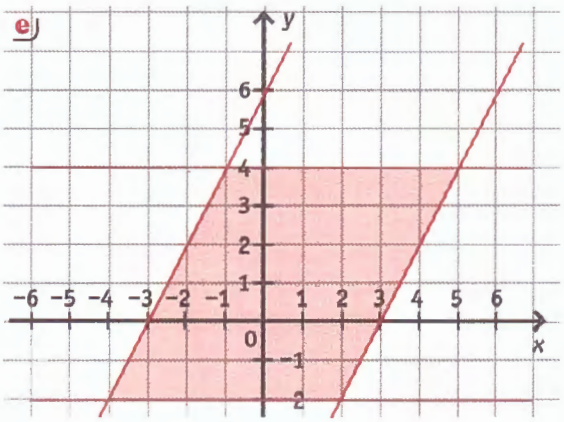
d)



.....

.....

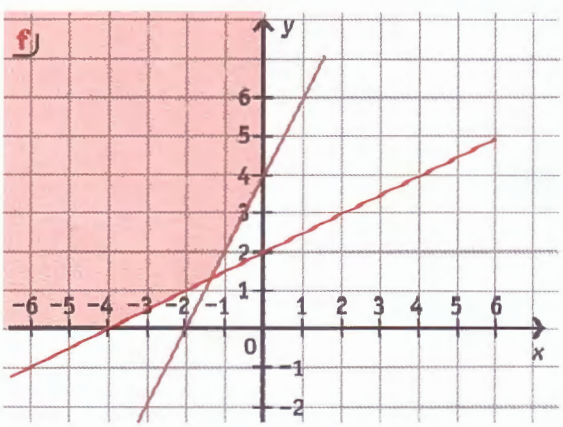
e)



.....

.....

f)



.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Programación lineal

Para leer y recordar

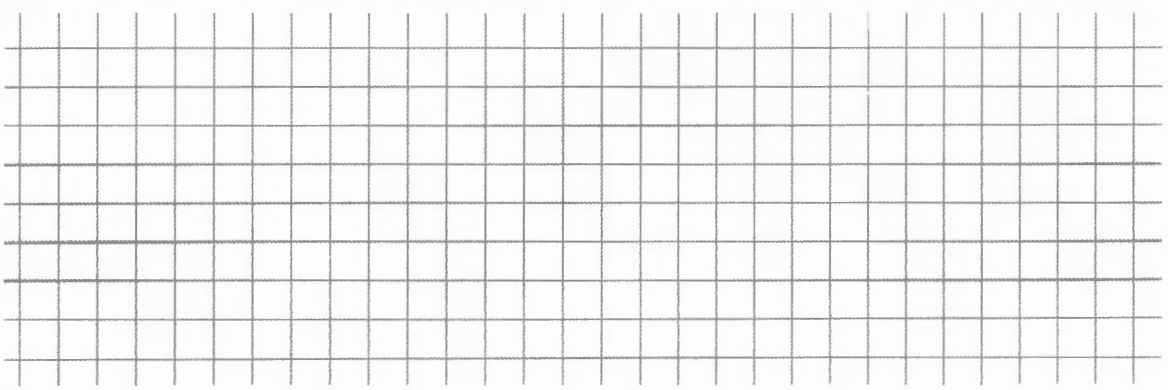
- La *programación lineal* es un conjunto de técnicas que permiten resolver un tipo especial de problemas. No nos dedicaremos aquí a demostrar la validez de este método ni a enunciarlo formalmente. Sólo nos proponemos manejar algunas de sus aplicaciones, que suelen relacionarse con planificaciones económicas o sociales.
- En estos problemas, se busca *minimizar* costos o *maximizar* beneficios, es decir, *optimizar* una situación que se expresa mediante una función lineal de dos variables, llamada *función objetivo*.
- La situación se plantea condicionada por un conjunto de *restricciones* que pueden ser traducidas como un *sistema de inecuaciones lineales*.

25 Un artesano hace collares y pulseras, y las vende en una feria los fines de semana. Para pagar los gastos que le insume su puesto, debe vender, como mínimo, 20 collares y 10 pulseras por fin de semana, pero no puede fabricar más de 30 collares y 50 pulseras por semana. La ganancia que obtiene es de $5 por cada collar y de $2 por cada pulsera. ¿Cuántos artículos de cada clase debe vender para maximizar su ganancia?

a) Completen las restricciones del problema expresadas mediante un sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \leq x \leq \ldots\ldots\ldots\ldots & x \text{ es la cantidad de collares.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \leq y \leq \ldots\ldots\ldots\ldots & y \text{ es la cantidad de pulseras.} \end{cases}$$

b) Representen gráficamente el sistema anterior.



c) Completen la fórmula de la función G, que representa la ganancia obtenida en función de la cantidad de collares y pulseras vendidos.

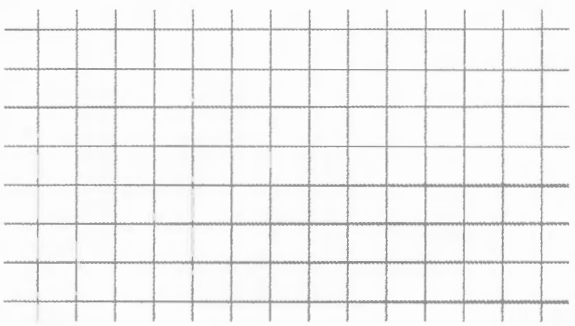
$G(x; y) = \ldots\ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots\ldots y$

d) Los valores que maximizan la función G se encuentran en uno de los vértices de la zona graficada en **b)**. Encuéntrenlos.

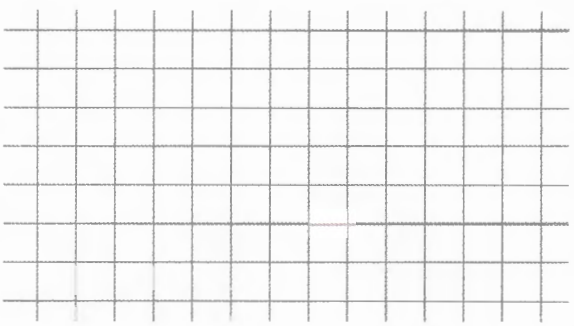
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

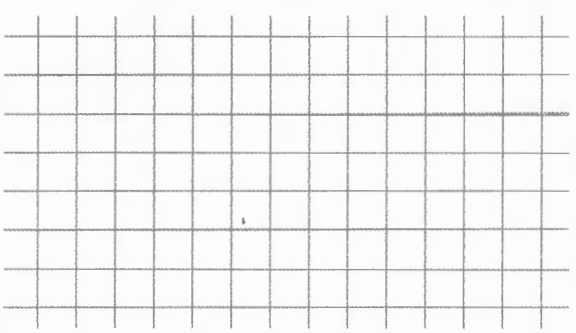
26 Una fábrica de insumos informáticos pone a la venta dos clases de teclados: común y anatómico. El costo de los materiales del teclado común es $10, y el costo de los del anatómico, $40. El gasto de mano de obra es $25 para el común, y $30, para el anatómico. La fábrica dispone de $8000 para materiales y $12 000 para mano de obra. Si la ganancia que arroja cada teclado es de $15 y de $30, respectivamente, ¿cuántos teclados de cada tipo debe fabricar para maximizar las ganancias?



27 Ruth debe seguir una dieta que incluya proteínas, pero que no sea demasiado calórica. Lo ideal es que consuma al menos 40 g de proteínas, pero no más de 1500 kcal por día. Un cierto alimento A contiene 4 g de proteínas y 50 kcal, y cuesta $0,50; otro alimento B contiene 2 g de proteínas y 150 kcal, y cuesta $1. Además, quiere incluir, al menos, dos unidades del alimento B porque es más sabroso, y tres del A, porque el envase es más práctico. ¿Cuántas unidades de cada alimento debe adquirir por día para minimizar el costo?



28 En el subsuelo de un edificio, están por habilitar una playa de estacionamiento que alojará automóviles y vehículos utilitarios. El seguro les otorga una cobertura para no más de 30 vehículos en total. La playa dispone de 250 m^2, descontando entrada, salida, pasillos y demás espacios comunes, y quieren destinar cocheras de 8 m^2 para los autos y cocheras de 10 m^2 para los utilitarios. Para estas últimas, averiguaron que más de 10 por día no se ocuparán. El precio por estadía de estacionamiento será $9 para los autos y $12 para los utilitarios.
¿Cuánto vehículos de cada clase deben admitir para que el ingreso por estadía sea el máximo?



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los problemas de encuentro

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta útil para resolver problemas en los que se simula el encuentro entre dos o más vehículos que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme.

Por ejemplo:

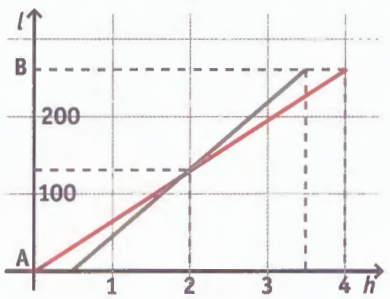
Un automóvil sale de un punto A con rumbo hacia otro punto B, que dista 240 km del primero, y lleva una velocidad constante de 60 km/h. Media hora después, otro automóvil sale de A y se dirige hacia B con una velocidad constante de 80 km/h. El segundo automóvil, ¿logra alcanzar al primero? ¿Dónde?

La situación puede representarse en un gráfico cartesiano como el que se muestra:

La distancia recorrida por el primer automóvil, en función del tiempo, está representada por la recta roja. La ecuación de esta recta es $y = 60x$ (espacio = velocidad por tiempo).

La del segundo automóvil es la gris, $y = 80(x - 0{,}5)$ (sale media hora después).

En el gráfico, puede apreciarse que el segundo automóvil encuentra al primero a las dos horas de haber salido este.



Para hallar las coordenadas de ese punto de encuentro, podemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = 60x \\ y = 80(x - 0{,}5) \end{cases}$$

$$60x = 80(x - 0{,}5)$$
$$60x - 80x = -40$$
$$-20x = -40$$
$$\boxed{x = 2}$$
$$y = 60 \cdot 2$$
$$\boxed{y = 120}$$

El conjunto solución es S = {(2; 120)}; por lo tanto, el segundo automóvil alcanza al primero a 120 km de A.

29 Un tren rápido sale de la ciudad A y se dirige a la ciudad B, distante 50 km, a las 8 de la mañana. Lleva una velocidad constante de 80 km/h. Un automóvil sale de B a las 8:15 h y se dirige hacia A con una velocidad constante de 100 km/h, por una ruta que bordea las vías del ferrocarril. ¿En qué momento se encuentran el auto y el tren?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las ecuaciones lineales y el punto de equilibrio

Todas las empresas que fabrican bienes deben asumir dos tipos de costos: los fijos y los variables. Como se desprende de su nombre, los costos *fijos* tienen un valor que no depende de la cantidad de bienes que se produzcan (impuestos, intereses bancarios, salarios), pero los *variables*, dependen del nivel de producción (mano de obra, materiales).

Cuando los costos variables por unidad son constantes, es decir, proporcionales a la cantidad que se produzca, puede establecerse el costo total mediante la siguiente ecuación que representa un modelo de costo lineal.

$y_c = cx + b$

y_c es el costo total; c es el costo variable por unidad; x es la cantidad de unidades producidas, y b es el costo fijo.

Si el costo total de producción excede el ingreso obtenido por las ventas, la empresa sufre una pérdida, y si el ingreso supera el costo total, goza de una utilidad. En el caso de que ocurra una equiparación entre el costo y los ingresos, no hay pérdida ni ganancia y el negocio está en equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso constituyen el *punto de equilibrio*.

Por ejemplo:

Un fabricante de pantalones tiene $2500 de gastos fijos por día y $40 de costo de materiales y mano de obra por cada pantalón. Si vende cada pantalón a $120, ¿Cuántos pantalones debe producir y vender por día para garantizar que su negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

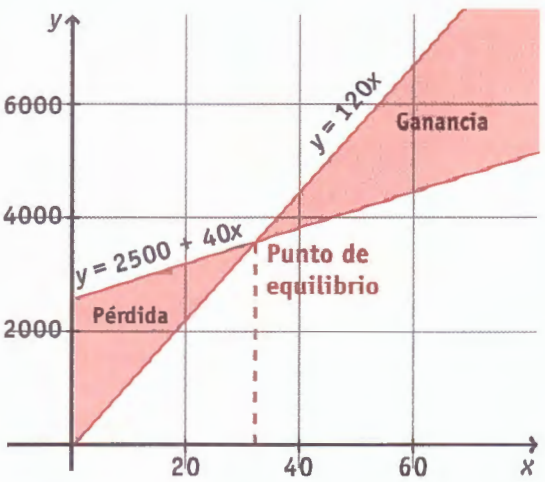
Las condiciones del problema permiten plantear el sistema:

$y_c = 2500 + 40x$

$y_v = 120x$

Al resolver ese sistema, se obtiene que el punto de equilibrio es 31,5.

Por lo tanto, para no tener pérdidas, debe fabricar y vender 32 pantalones por día.



30 Hallen el punto de equilibrio para la siguiente situación.

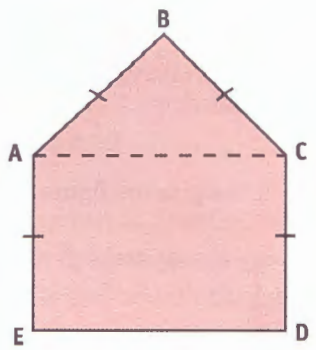
Para fabricar lapiceras, los costos fijos son $500 diarios y $3 por unidad, los variables. Las lapiceras se venden a $12 cada una.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

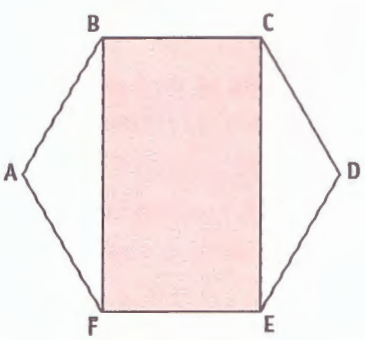
MÁS ACTIVIDADES

31 Los mellizos Julián y Dalma cumplieron años. Con el dinero que le regalaron algunos de los familiares, juntaron $200 cada uno. Julián se compró con ese dinero cinco CD de música y cuatro películas en DVD. A Dalma le encanta el cine, por eso se compró, con el mismo dinero, 8 películas en DVD. Si todos los CD costaban lo mismo y todos los DVD, también, ¿cuál era el precio de cada artículo?

32 El perímetro del polígono ABCDE es 13 cm, y el perímetro del triángulo ABC es 8 cm. ¿Cuál es el área de la figura?



33 El polígono ABCDEF es un hexágono regular. El perímetro del triángulo ABF es 18,64 cm, y el perímetro del rectángulo BCEF es 27,28 cm. Calculen el área del rectángulo.



34 En una fábrica de autopartes, producen dos tipos de repuestos: el A y el B. La fabricación de cada pieza A lleva una hora de trabajo de un operario, y la de cada pieza B, dos horas. Tienen 20 operarios que trabajan 8 horas por día cada uno, de lunes a viernes, en la fabricación de esos dos repuestos.

a) Averigüen cuántas piezas de cada clase produjeron la semana pasada, con la siguiente información.

I. El lunes fabricaron 10% más de piezas B que de A.

II. El martes produjeron 120 piezas en total.

III. El miércoles la producción de piezas A fue el doble que la de piezas B.

IV. El jueves faltaron dos operarios, y se fabricaron igual cantidad de cada clase de pieza.

V. El viernes trabajaron dos horas menos; no faltó ningún operario, y fabricaron cierta cantidad de piezas A y 20 piezas B.

b) ¿Pueden fabricar igual cantidad de piezas de cada clase en las condiciones originales? ¿Por qué?

35 Juan estuvo de visita, el fin de semana, en lo de su hermana, en una ciudad que dista 150 km de la ciudad en la que vive Juan. A las 7 de la mañana, Juan emprendió el regreso en su automóvil a una velocidad constante de 100 km/h. A la media hora, su hermana se dio cuenta de que se había olvidado una carpeta que necesitaba para una reunión a las 9 de la mañana, y salió en su automóvil para alcanzársela.

a) ¿A qué velocidad constante, debe viajar la hermana de Juan para llegar a tiempo?

b) Si Juan se percatara de la situación en el mismo momento que su hermana, y él decidiera volver para buscar la carpeta, ¿en qué momento se encontraría con su hermana? ¿Llegaría a tiempo a la reunión si viaja a la misma velocidad?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

36 Indiquen un valor de k para que los sistemas siguientes cumplan la condición pedida en cada caso.

a) $\begin{cases} kx + ky = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

I. Sea incompatible.
II. Sea compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + ky = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

I. Sea compatible determinado.
II. Sea compatible indeterminado.

37 Resuelvan los siguientes sistemas con el método que consideren más conveniente.

a) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x+y}{5} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} = 1 \\ \frac{2x+3y}{4} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-y}{3} = 2 \\ \frac{x+y}{2} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \frac{2y-3}{7} \\ y = \frac{3x+5}{4} \end{cases}$

38 Indiquen, sin resolver ningún sistema, las posiciones relativas de las rectas asociadas a los siguientes pares de ecuaciones.

a) $\begin{cases} y = 1 - x \\ 2y + 2x = 2 \end{cases}$

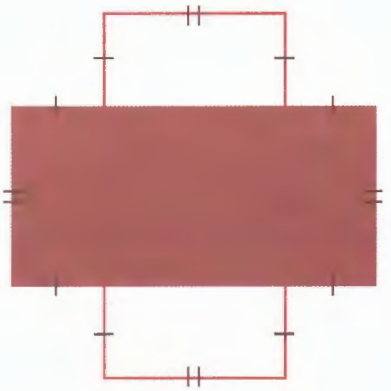
b) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2y - 6x = 2 \end{cases}$

39 Hallen el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen la condición pedida, en cada caso.

a) Su abscisa está comprendida entre –1 y 3, inclusive.

b) La suma de su abscisa y su ordenada es mayor que 1.

40 Observen la siguiente figura.



a) ¿Es cierto que el perímetro total es el doble del perímetro del rectángulo de color? ¿Por qué?

b) Si los lados del rectángulo miden 5 y 9, respectivamente, ¿cuánto mide el perímetro de la figura total?

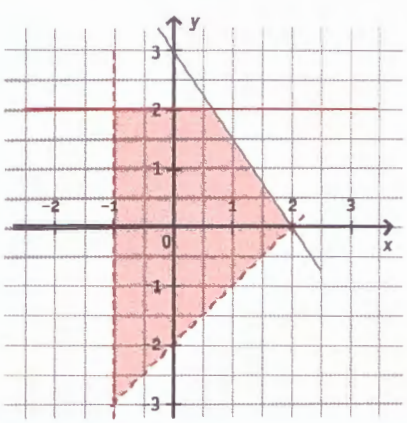
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

41 Jaime hace reparto de correspondencia con su auto. La empresa A le paga $5 por cada sobre entregado, y la empresa B, con empaques más pesados, le paga $7 por cada uno. Jaime tiene dos compartimientos en el baúl de su auto. En el que lleva los sobres, caben 120; y en el que lleva los paquetes, caben 100. Por día puede repartir 150 unidades como máximo. ¿Cuántas unidades de cada clase de correspondencia debe repartir por día para que su beneficio diario sea máximo?

42 Silvina tiene sus 63 libros acomodados en dos estantes. Como es muy ordenada, pasó 10 libros del estante de arriba, que es más corto, al de abajo, para que le quedaran en el de abajo el doble de libros que en el de arriba. ¿Cuántos libros había en cada estante antes del cambio?

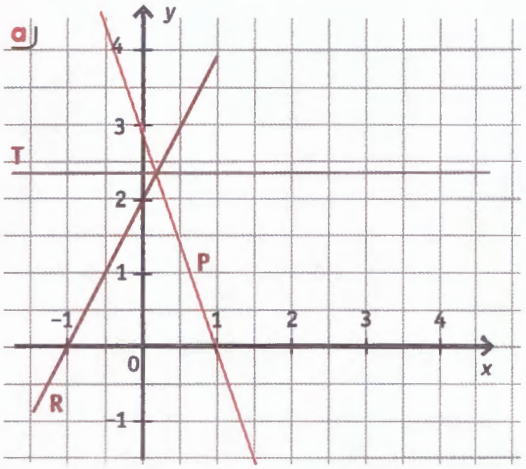
43 Un empresario desea invertir no más de $120 000 en dos bancos. El banco A le ofrece un interés del 5% anual y acepta depósitos de hasta $50 000, y el banco B, un interés del 8% y no acepta depósitos mayores que $100 000. ¿Cuánto debe invertir en cada banco para que el rendimiento sea máximo?

44 Escriban el sistema de inecuaciones que define la siguiente zona.

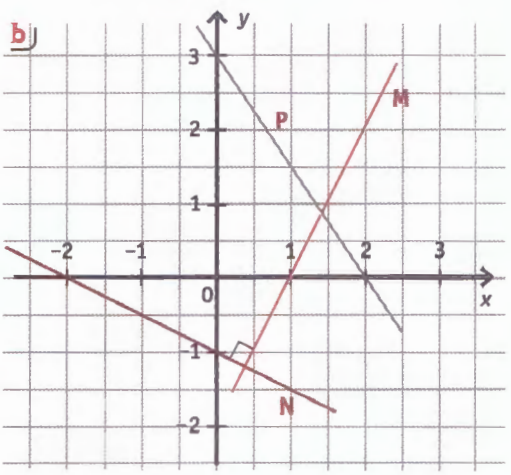


45 Escriban el sistema de ecuaciones que corresponde al gráfico, en cada caso.

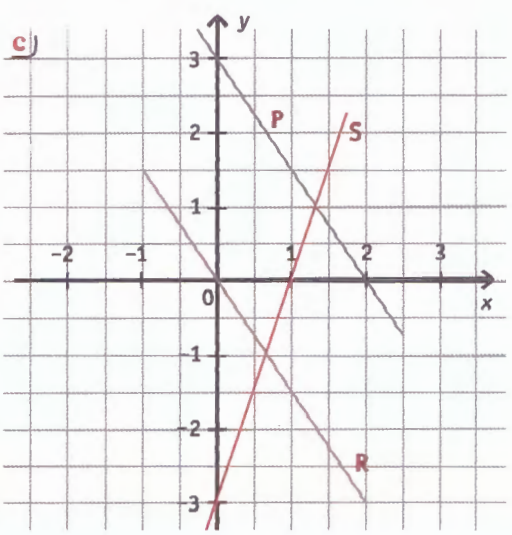
a)



b)



c)



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 En una lavadero de autos, el lavado común cuesta $15, y tardan al menos 20 minutos en hacerlo. En cambio, el lavado *plus* cuesta $20 y les lleva no más de 40 minutos. Para compensar los gastos fijos, tienen que hacer al menos 30 lavados comunes y 20 *plus* por fin de semana, pero con los tres empleados que tienen, no llegan a hacer más de 100 lavados en total. Si llamamos x a la cantidad de lavados comunes e y a la de lavados *plus*, para esta situación:

a) La función objetivo para maximizar la ganancia es $G(x; y) = 20x + 40y$.

b) $x + y < 100$ es una restricción.

c) La ganancia es máxima con 70 lavados *plus* y 30 comunes.

d) Ninguna de las anteriores.

2 Un examen consta de 20 preguntas y se aprueba con 14 puntos. Cada pregunta bien contestada vale 1 punto; mal contestada, –1 y sin contestar, 0. Juan no contestó dos preguntas y obtuvo 12 puntos. Entonces,

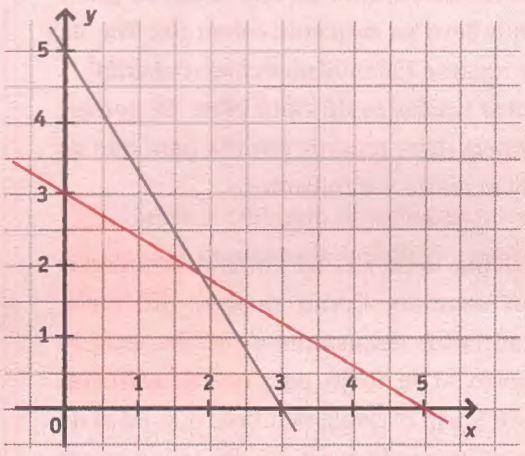
a) Contestó mal la mitad de las preguntas.

b) Contestó más preguntas mal, que bien.

c) Si hubiera contestado bien una pregunta más, habría aprobado.

d) Las preguntas que contestó bien son dos más que las que contestó mal.

3 La zona sombreada en el gráfico representa:



a) El conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} y + \frac{5}{3}x \leq 5 \\ y + \frac{3}{5}x \leq 3 \end{cases}$$

b) Un semiplano.

c) Todos los puntos cuya abscisa y su ordenada sean menores o iguales que 3.

d) Ninguna de las anteriores.

4 Para: $\begin{cases} k \,.\, x - 6y = 4 \\ 2x + 4y = 3 \,.\, m \end{cases}$

a) Si $k = -3$ y $m = -\frac{8}{9}$, el sistema es incompatible.

b) Si $k = -3$ y $m = -8$, el sistema es compatible determinado.

c) El sistema nunca es incompatible.

d) Ninguna de las anteriores.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

5 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las *funciones cuadráticas* permiten describir innumerables fenómenos relacionados con distintas ciencias, y la resolución de las ecuaciones cuadráticas posibilita obtener información respecto de los valores que esos fenómenos alcanzan.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Calculen.

a) $(-1)^2 =$ .....

b) $-(-1)^2 =$ .....

c) $-1^2 =$ .....

d) $3 \cdot (-2)^2 =$ .....

e) $-3 \cdot 2^2 =$ .....

f) $-3 \cdot (-2)^2 =$ .....

g) $3^{-1} =$ .....

h) $-3 \cdot 3^{-2} =$ .....

2 Resuelvan en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones, cuando sea posible, y cuando no lo sea, expliquen por qué.

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $(x - 1)^2 = 4^{-1}$

c) $x^2 = -9$

d) $(x - 1)^2 = x^2 - 1$

e) $x(x - 1) = 0$

f) $(x - 1)^2 = 5 - 2x$

3 Completen las tablas, como en los ejemplos.

a)

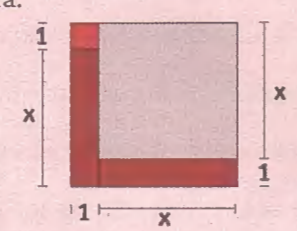
$P(x)$	$P(-2)$	$P(0)$	$P(0{,}5)$
$2x^2 + x - 5$	$2(-2)^2 + (-2) - 5 = 1$		
$x(6 - x)$			
$3x - x^2 + 6$			

b)

$M(x)$	$M(k) = 2$	$M(k) = 3$	$M(k) = 18$
$0{,}5\,x^2$			
$x^2 - 7$	$k = 3$; $k = -3$		
$(x + 5)^2 + 2$			

4 Observen las siguientes figuras y expresen el área de cada una, de una manera distinta de la que se muestra.

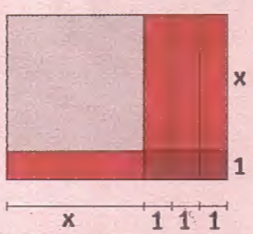
a)



$A(x) = (x + 1)^2$

$A(x) =$ ..... + ... + ...

b)



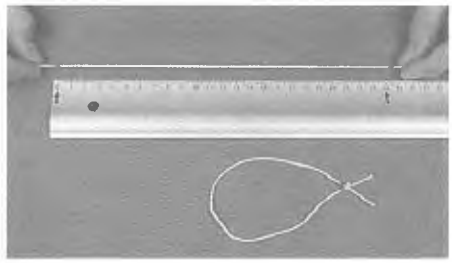
$A(x) = x^2 + 4x + 3$

$A(x) =$ .....

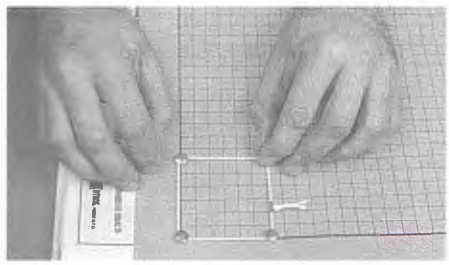
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El modelo cuadrático

5 Pedro realizó la siguiente experiencia. Tomó un piolín de 30 cm, varias chinches y un cuadrado de cartulina de 20 cm de lado con el primer cuadrante de un sistema cartesiano graficado en él.

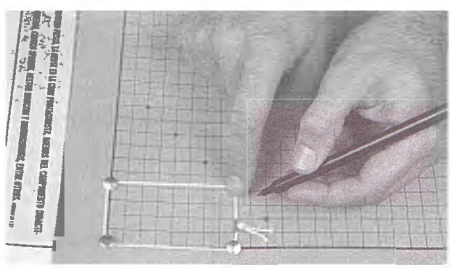


- Con un marcador, señaló los dos extremos de un segmento de 24 cm en el piolín y unió los dos extremos del segmento con un nudo.



- Fijó el piolín con una chinche en el origen de coordenadas. Sobre un punto cualquiera del eje de abscisas, pinchó otra chinche y construyó un rectángulo con esa medida en la base, y con la altura que le permitió el piolín.

- Repitió este procedimiento para distintos puntos del eje de abscisas y construyó una tabla con las medidas de la base y de la altura.



a) Completen la tabla siguiente con medidas posibles para la experiencia que realizó Pedro.

Base (cm)							
Altura (cm)							

b) Representen los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.

c) Escriban una expresión que permita calcular el área de cualquiera de esos rectángulos en función de la medida x de su base.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

6 Un estudiante de Meteorología encontró en un texto dos modelos para pronosticar la temperatura promedio anual (T_1 y T_2), en función de la latitud (l) del lugar, representados por las siguientes fórmulas: $T_1 = -0{,}61 \cdot l + 35{,}56$ y $T_2 = -0{,}006 \cdot l^2 - 0{,}07 \cdot l + 27{,}47$. Averiguó que uno de los dos modelos es más exacto que el otro, pero no sabe cuál.

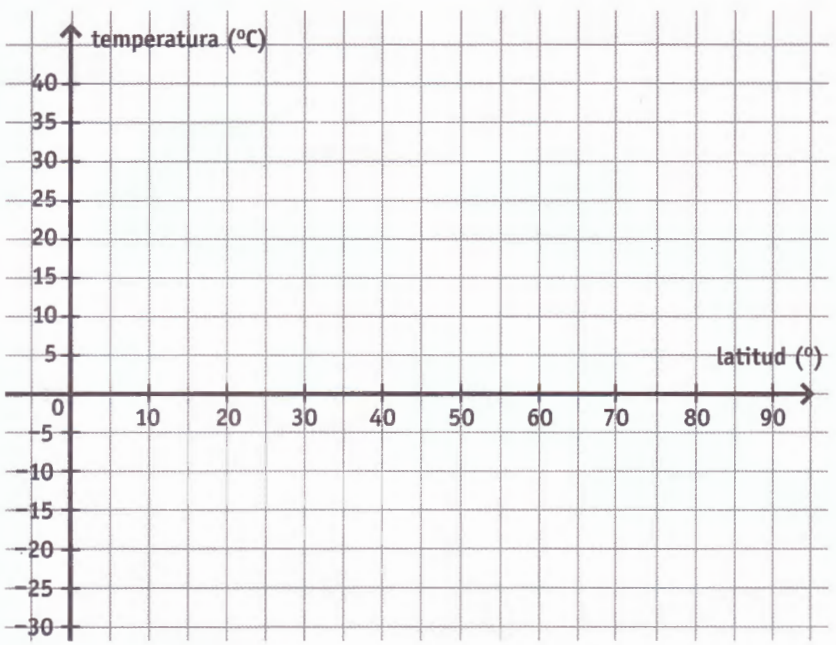
Consiguió una tabla como la siguiente, que muestra las temperaturas medias registradas en determinado año, en distintas latitudes del hemisferio sur.

l (°)	85	75	65	55	45	35	25	15	5
T (°C)	−20	−12	−3	6	12	18	22	25	26

a) Completen los datos de la tabla siguiente, utilizando los dos modelos aproximativos.

l(°)	85	75	65	55	45	35	25	15	5
T_1(°C)	−16,29								
T_2(°C)		−11,53							

b) Representen con distintos colores los puntos correspondientes a T, T_1 y T_2, en el gráfico siguiente.



c) Observen y comparen las gráficas que obtuvieron. Anoten las características de cada una.

.....

.....

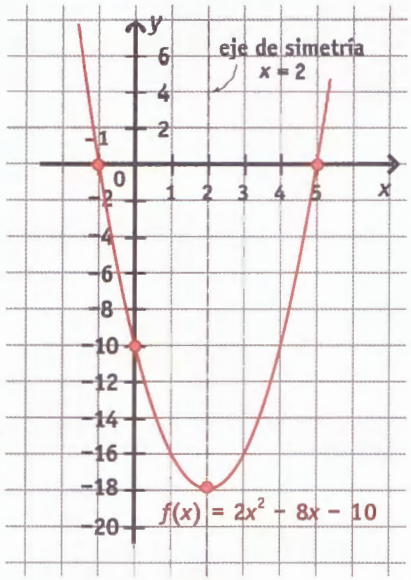
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función cuadrática

Para leer y recordar



- Llamamos *función cuadrática* a toda función que puede expresarse de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$a \in \mathbb{R} \longrightarrow$ *coeficiente principal*
$b \in \mathbb{R} \longrightarrow$ *coeficiente del término lineal*
$c \in \mathbb{R} \longrightarrow$ *término independiente*
} de la forma polinómica

- El *dominio natural* de estas funciones es $\mathbb{R}$, y al representarlas gráficamente, se obtiene una curva llamada *parábola*.
- Cada parábola presenta un *eje de simetría* vertical y, sobre él, un punto llamado *vértice* en el que la curva pasa de ser creciente a decreciente o viceversa.
- Los *ceros* o *raíces reales* de una función cuadrática, cuando los tiene, son las abscisas de los puntos de contacto entre su gráfica y el eje de las *x*.

Vértice: (2; −18) **Raíces: 5 y −1** **Ordenada al origen: −10**

7 Completen la tabla de valores, representen la curva correspondiente y señalen en ella el vértice y el eje de simetría para cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 9$

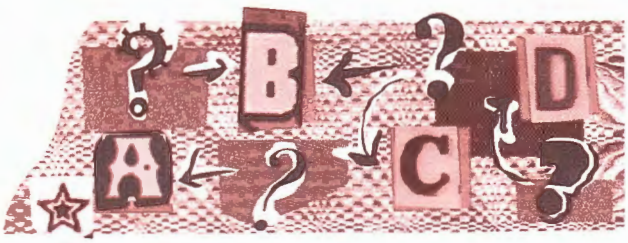
x	−5	−3	−1	0	1	3	5
y							

b) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$

x	−7	−5	−3	−1	1	3	5
y							

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

8 Una de las siguientes fórmulas no representa una función cuadrática. Realicen los cálculos necesarios e indiquen cuál es y por qué la eligieron.



a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$

b) $g(x) = -(x + 2)^2 + 9$

c) $h(x) = (x + 2)^2 - x^2$

d) $j(x) = (x + 1)(x + 2)$

.....

.....

9 Consideren la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 4x - 5$.

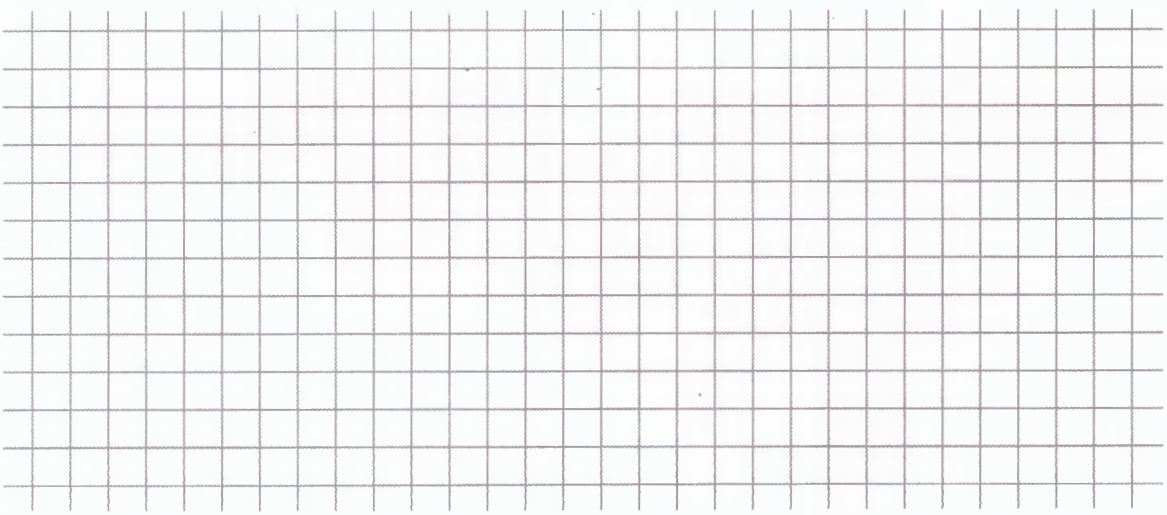
a) Completen la tabla de valores.

x	-1	5	0	4	2	-2	6	-3	7
$f(x)$									

b) Tomen los valores de x que tienen la misma imagen (puntos simétricos) y calculen el promedio de cada par.

.....

c) Construyan la gráfica de la función f. Marquen el vértice, el eje de simetría y dos pares de puntos simétricos. Enuncien una conclusión.



.....

d) Marquen las raíces de $f(x)$ en la gráfica y anoten sus valores.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

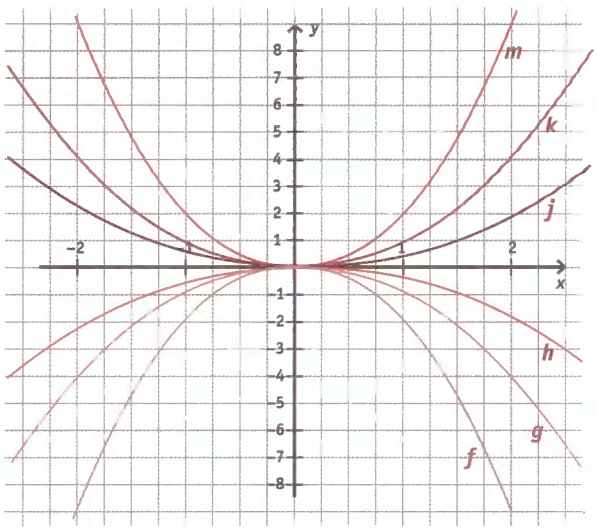
Variaciones en la gráfica de la función cuadrática

10 Observen el diagrama cartesiano en el que se han graficado 6 funciones cuadráticas.
Cada una de las gráficas se corresponde con una fórmula de las que aparecen a continuación.

I. $y = 2x^2$ IV. $y = -\frac{1}{2}x^2$

II. $y = -x^2$ V. $y = x^2$

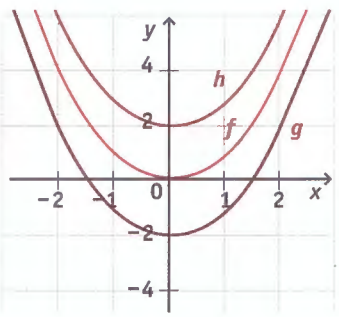
III. $y = \frac{1}{2}x^2$ VI. $y = -2x^2$



a) Sin construir ninguna tabla, encuentren la fórmula que le corresponde a cada gráfica y anótenla en el diagrama. Expliquen cómo lo pensaron.

b) Escriban una conclusión respecto de las variaciones de las gráficas de las funciones del tipo $f(x) = ax^2$, a medida que varía el valor de a.

11 Observen las gráficas de las funciones f, g y h.



a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de cada parábola?

b) Sabiendo que la fórmula de f es $f(x) = x^2$, ¿qué fórmula le harían corresponder a g y a h para que sus gráficas resultaran idénticas a la de f, pero con el vértice desplazado verticalmente, como se muestra en la figura?

12 Consideren las funciones cuadráticas representadas por las fórmulas que se dan a continuación.

a) Completen la tabla de valores para cada una y representen cada función en el diagrama cartesiano, con distintos colores.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$							
$h(x) = x^2 + 3$							
$j(x) = x^2 - 1$							

b) Escriban una conclusión respecto de cómo obtener las gráficas de las funciones del tipo $g(x) = x^2 + c$, trasladando la gráfica de $f(x) = x^2$.

.....

.....

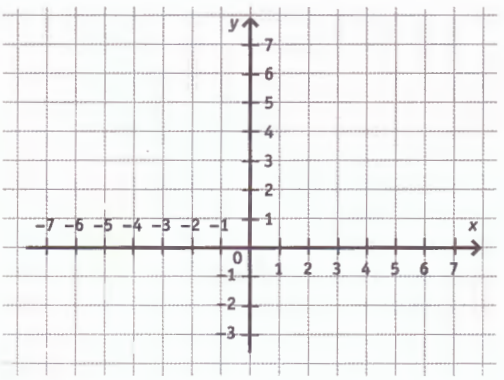
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

13 Consideren las funciones cuadráticas representadas por las fórmulas que se dan a continuación.

a) Completen las tablas de valores para cada una.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x+1)^2$	$h(x) = (x+2)^2$	$j(x) = (x-1)^2$	$k(x) = (x+3)^2$
−3					
−2					
−1					
0					
1					
2					
3					

b) Representen cada función en el siguiente diagrama, con distintos colores.

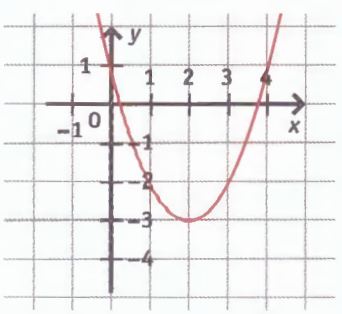


c) Escriban una conclusión respecto de cómo obtener las gráficas de las funciones del tipo $g(x) = (x+c)^2$, trasladando la gráfica de $f(x) = x^2$.

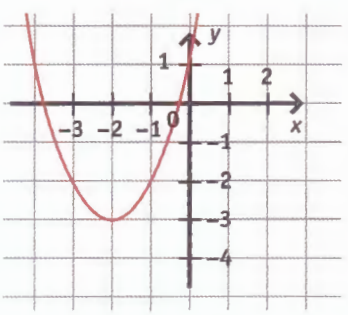
.....

14 ¿A cuál de las siguientes gráficas, le corresponde la función de fórmula $f(x) = (x+2)^2 - 3$? ¿Por qué?

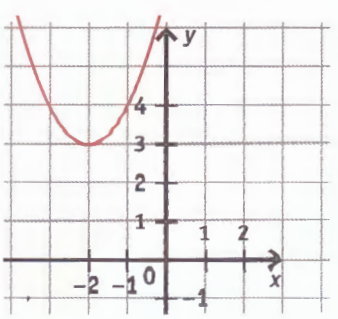
a)



b)



c)



.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Forma canónica de la función cuadrática

Para observar

- Si conocemos las coordenadas del vértice de una función cuadrática, su fórmula puede expresarse en *forma canónica* así:

$$f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$$

x_v: abscisa del vértice

y_v: ordenada del vértice

- Para hallar el valor de a, es necesario conocer, además, algún otro punto de la parábola y reemplazar en la expresión anterior las coordenadas $(x; f(x))$ de ese punto.

15 Observen las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas.

a) Identifiquen las coordenadas del vértice de cada parábola y escriban su forma canónica.

.....

b) Realicen los cálculos necesarios y completen la siguiente tabla, como se muestra en el ejemplo.

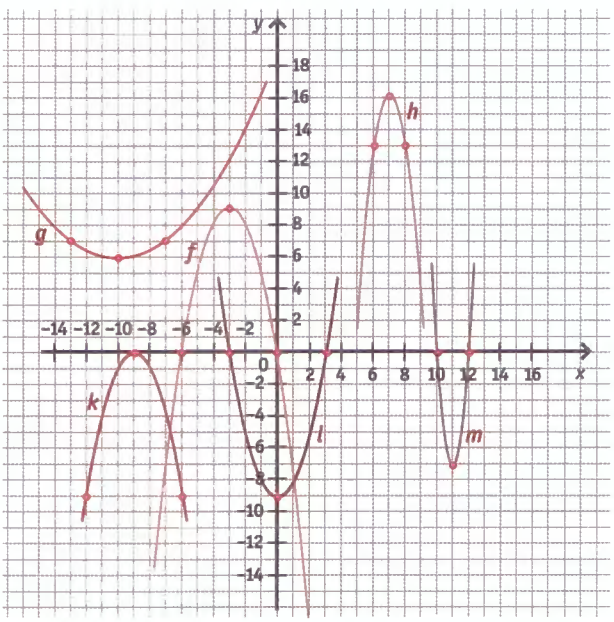
$f(x) = a\,(x - 3)^2 + 9$

(0; 0) pertenece a la gráfica, entonces:

$0 = a\,(0 - 3)^2 + 9$

$0 = a \cdot 9 + 9$

$a = -1$



Función	Valor de a	Forma canónica	Forma polinómica
f	-1	$f(x) = -(x + 3)^2 + 9$	$f(x) = -(x^2 + 6x + 9) + 9 = -x^2 - 6x$
g			
h			
k			
l			
m			

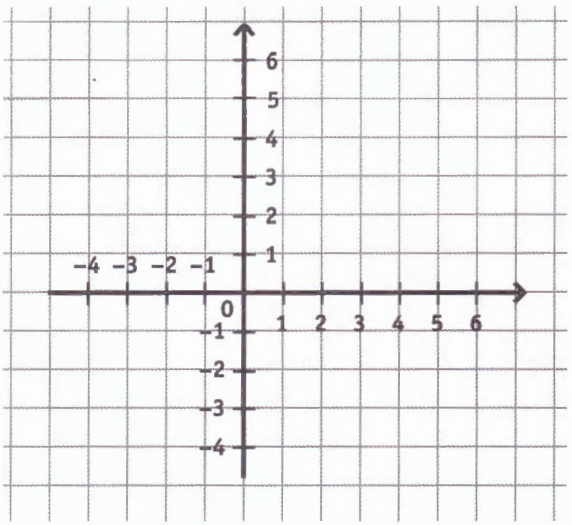
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

16 Escriban las formas canónica y polinómica de cada una de las funciones cuadráticas que se describen a continuación. Luego, verifiquen sus respuestas gráficamente.

a) El vértice de la función f es el punto (2; 0) y corta al eje y en 4.

$f(x) =$ .....

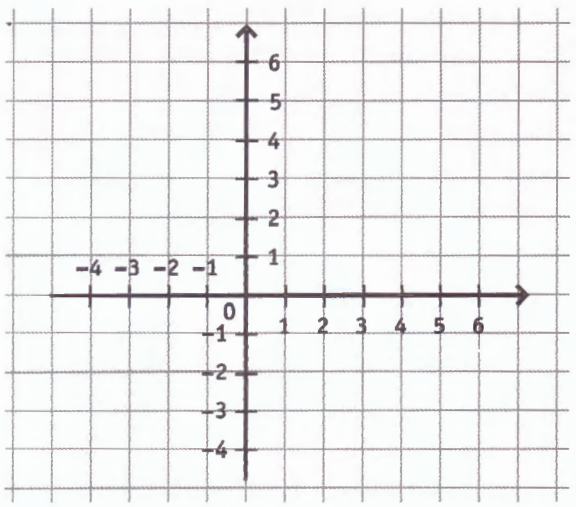
$f(x) =$ .....



b) Los puntos (0; 5) y (4; 5) son simétricos en la gráfica de la función j, y su vértice está en (2; 1).

$j(x) =$ .....

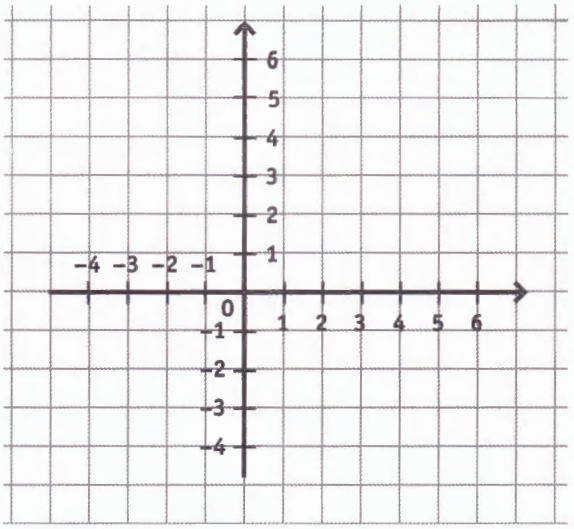
$j(x) =$ .....



c) Los puntos (–2; 5) y (2; 5) son simétricos en la gráfica de la función g, y la ordenada al origen es $y = 1$.

$g(x) =$ .....

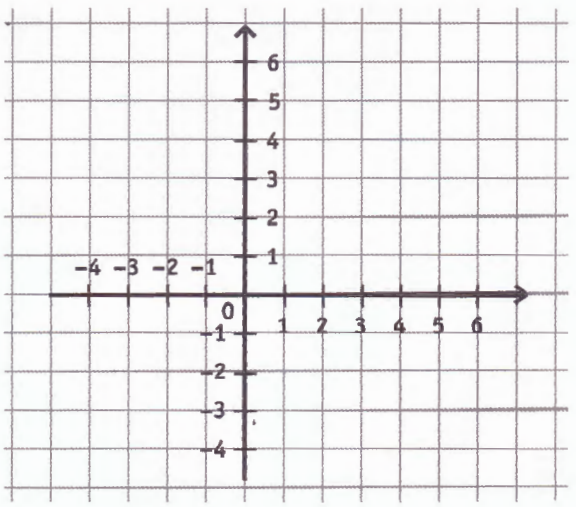
$g(x) =$ .....



d) La gráfica de la función h tiene su vértice en (2; 4) y contiene al origen de coordenadas.

$h(x) =$ .....

$h(x) =$ .....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Máximos y mínimos

17 El *freezer* de una heladera tiene un termómetro exterior que marca la temperatura de su interior. En condiciones normales, señala una temperatura de 18 °C bajo cero; sin embargo, a partir del instante en que la puerta del *freezer* es abierta, esa temperatura empieza a variar según un modelo cuadrático. Ese modelo tiene sentido hasta que la temperatura vuelve a estabilizarse y recupera su marca inicial.
La puerta de un freezer se abre en el momento en que el termómetro marca 18 °C bajo cero; a los 6 minutos, instante en que la puerta se cierra, el termómetro indica una temperatura de 0,4 °C. Ayúdense con un gráfico y respondan a las preguntas.

a) ¿En qué período, la temperatura subió?

.....

b) ¿En qué período, la temperatura bajó?

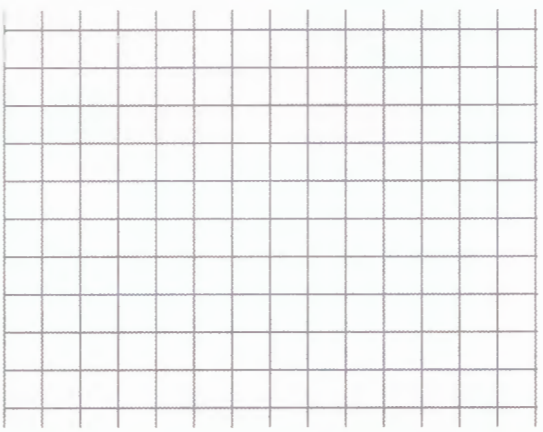
.....

c) ¿En qué instante, la temperatura fue máxima?

.....

d) ¿Cuál fue la temperatura máxima?

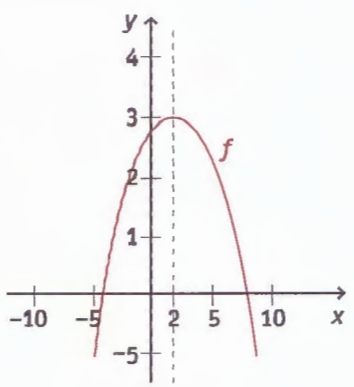
.....



Para observar

La función $f(x) = -\frac{1}{12}(x - 2)^2 + 3$ es creciente en $(-\infty; 2)$ y decreciente en $(2; +\infty)$.

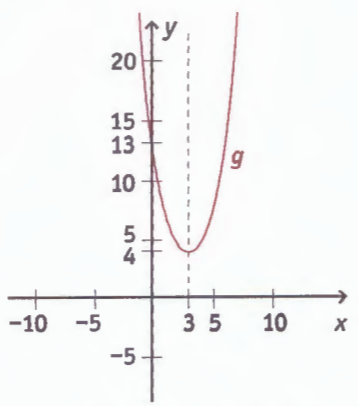
Im $f = (-\infty; 3]$



f tiene un máximo absoluto en $x = 2$.

La función $g(x) = (x - 3)^2 + 4$ es creciente en $(3; +\infty)$ y decreciente en $(-\infty; 3)$.

Im $g = [4; +\infty)$



g tiene un mínimo absoluto en $x = 3$.

- La abscisa del vértice de una parábola determina sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- La ordenada del vértice de una parábola es el valor máximo o mínimo absoluto que toman las imágenes.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

18 Completen la tabla siguiente.

Función	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento	Tiene un máximo en...	Tiene un mínimo en...	Imagen
$f(x) = -3(x + 1)^2 + 2$					
$g(x) = (x \ldots\ldots)^2 \ldots\ldots$	$(2; +\infty)$				$[-2; +\infty)$
$h(x) = -(x \ldots\ldots)^2 \ldots\ldots$		$(-3; +\infty)$			$(-\infty; 4]$
$j(x) = \frac{1}{2}(x \ldots\ldots)^2 - 1$				$x = -5$	

19 Una empresa de telefonía celular quiere incorporar en el mercado un novedoso equipo y estima que las ventas, en miles de unidades, responderán a la fórmula $V(t) = -\frac{1}{8}t^2 + t$, donde t indica las semanas transcurridas desde que el producto sale a la venta.
Indiquen el intervalo de tiempo en que las ventas estarán en permanente crecimiento, según este modelo.

.....

20 Realicen la gráfica de una función cuadrática que cumpla con las condiciones pedidas, en cada caso, y luego escriban la fórmula de cada una.

a) f es creciente en $(3; +\infty)$, Im $f = [-7; +\infty)$, y su ordenada al origen es $y = -4$.

.....

b) g tiene un máximo en $x = 5$, Im $g = (-\infty; 8]$ y $g(2) = 0$.

.....

c) h es decreciente en $(-\infty; -3)$, Im $h = [6; +\infty)$.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Conjuntos de positividad y de negatividad. Ceros

21 Un meteorólogo modelizó con una fórmula la variación de la temperatura (T, en °F) en función del tiempo transcurrido (t, en horas) desde las 8:00 h, para un día del mes de julio en una ciudad. Esa fórmula es:

$$T(t) = \frac{1}{20}t^2 - \frac{9}{5}t + \frac{72}{5}$$

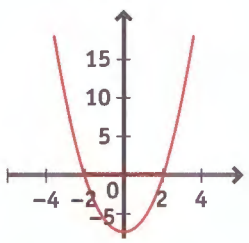
a) ¿Cuándo se registraron temperaturas sobre cero?

.....

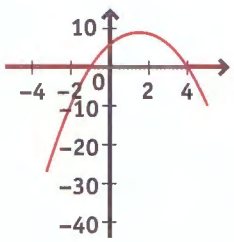
b) ¿Cuándo se registraron temperaturas bajo cero?

.....

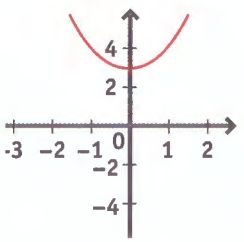
Para observar



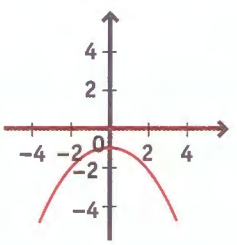
$C^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
$C^- = (-2; 2)$
$C^0 = \{-2; 2\}$



$C^+ = (-1; 4)$
$C^- = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$
$C^0 = \{-1; 4\}$



$C^+ = \mathbb{R}$
$C^- = \emptyset$
$C^0 = \emptyset$



$C^+ = \emptyset$
$C^- = \mathbb{R}$
$C^0 = \emptyset$

22 Realicen los cálculos necesarios, y luego:

a) Completen la tabla.

Función	Raíces	C^0	C^+	C^-
$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$				
$g(x) = x(x - 8)$				
$h(x) = (x + 1)(x - 1)$				
$j(x) = -x^2 - 9$				
$k(x) = -2x^2 - 2x$				

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones cuadráticas

23 Determinen mentalmente los ceros o raíces de cada una de las siguientes funciones. Expliquen cómo lo pensaron.

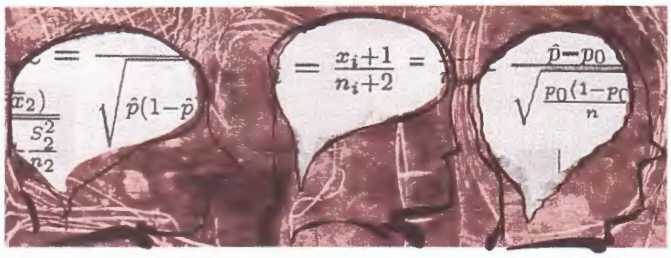
a) $f(x) = x^2 - 9$

b) $g(x) = (x + 3)^2$

c) $h(x) = (x - 1)(x + 9)$

d) $j(x) = 3x\ (x + 4)$

e) $k(x) = -2(x + 4)\ (x - 2)$



Para leer y recordar

- Llamamos *ecuaciones cuadráticas* o *ecuaciones de segundo grado* a las ecuaciones que pueden reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$).
- Cuando igualamos a cero la fórmula de una función cuadrática para averiguar sus raíces, planteamos una ecuación cuadrática. Las *soluciones reales* de esta ecuación, que pueden ser dos, una o ninguna, serán los valores buscados.
- Decimos que una ecuación cuadrática es *incompleta* cuando sus coeficientes b o c son nulos.

Observen cómo podemos resolver algunas ecuaciones cuadráticas incompletas.

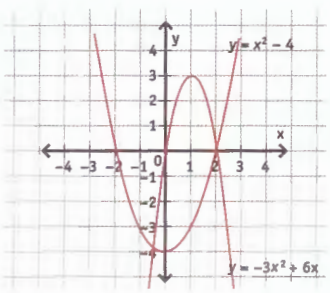
$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{4}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$



$-3x^2 + 6x = 0$

$x \cdot (-3x + 6) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad -3x + 6 = 0$

$-3x = -6$

$x = -6 : (-3)$

$x_2 = 2$

24 Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 169 = 0$

b) $3x^2 - 3 = 0$

c) $(x + 1)^2 = 36$

d) $(x - 20)^2 + 1 = 26$

e) $x\ (x + 30) = 0$

f) $-5(x + 14)\ (x - 8) = 0$

g) $x^2 + 100x = 0$

h) $70 - x^2 = -11$

i) $(5x + 2)^2 = 20x + 13$

25 Se tiene que construir un tanque cilíndrico para distribuir agua a una vivienda. Por características de la construcción, la altura h del tanque debe ser de 2 m.

a) Hallen la fórmula de la función que determina el volumen de ese tanque en función del radio.

b) ¿Cuál es el volumen del tanque si la construcción se hace con un radio de 1 m? ¿Y para un radio de 3 m?

c) Si se necesita que el volumen sea 25,13 m^3, ¿qué diámetro debe tener el tanque?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

- Así podemos hallar los ceros de una función cuadrática expresada en forma canónica:

$(x + 4)^2 - 9 = 0$ ⟶ Igualamos la fórmula a cero.

$(x + 4)^2 = 9$

$|x + 4| = 3$ ⟶ Resolvemos la ecuación planteada. Las dos soluciones de la ecuación son las raíces de la función.

$x = -1$ $x = -7$

- Si la función está expresada en forma polinómica, para hallar sus raíces, podemos escribirla en forma canónica, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$f(x) = x^2 + 4x - 9$

$f(x) = -9$ ⟶ La ordenada al origen es −9.

$x^2 + 4x - 9 = -9$ Buscamos el simétrico de (0; −9).

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x = 0$ $x = -4$ Como (0; −9) y (−4; −9) son simétricos, el punto medio del intervalo (0; −4) es la abscisa del vértice.

$x_v = -2$

$y_v = (-2)^2 + 4(-2) - 9$ ⟶ Buscamos la ordenada del vértice.

$y_v = -13$

$f(x) = (x + 2)^2 - 13$ ⟶ Escribimos la forma canónica de la función.

26 Completen la tabla.

Función	Ordenada al origen	Dos puntos simétricos		Eje de simetría	Vértice	Raíces
$h(x) = x^2 - 8x + 7$	.....	(.....;.....)	(.....;.....)	$x =$	(.....;.....)	$x_1 =$ ..... $x_2 =$ .....
$j(x) = \frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + 5$						
$k(x) = x^2 + 6x - 12$						
$m(x) = x^2 - 12x - 20$						

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

27 Una empresa lanza a la venta un nuevo producto. De inmediato, la competencia hace lo mismo con un producto de las mismas características. Esta situación hace que la primera empresa, estratégicamente, deba disminuir progresivamente el precio de venta, hasta reposicionar el producto en el mercado.

Si el precio P del producto durante el primer año sigue el modelo $P(x) = 50 - 10x + x^2$, donde x indica el tiempo en meses:

a) Indiquen el precio del producto en el momento del lanzamiento.

.....

b) Indiquen cuál había sido el porcentaje de rebaja a los 5 meses.

.....

c) Comparen el precio del producto en el momento que se puso a la venta con su precio a los 10 meses.

.....

28 Un pez observa desde una pecera una pizca de alimento en la superficie del agua y se lanza hacia él. Su trayectoria le permite alcanzar el alimento y describe una curva que puede modelizarse con una de las siguientes fórmulas:

$$T_1(x) = -x^2 + 12x - 37 \qquad T_2(x) = -x^2 + 12x - 36 \qquad T_3(x) = -x^2 + 12x - 35$$

Determinen con cuál de las tres trayectorias puede alcanzar el alimento sin salir del agua.

.....

29 Una pizzería ofrece a sus clientes la pizza en moldes circulares, cuyos diámetros (en centímetros) son números enteros desde 16 hasta 30 inclusive.

El precio (P) por unidad en función del diámetro (d) sigue un modelo cuadrático dado por:

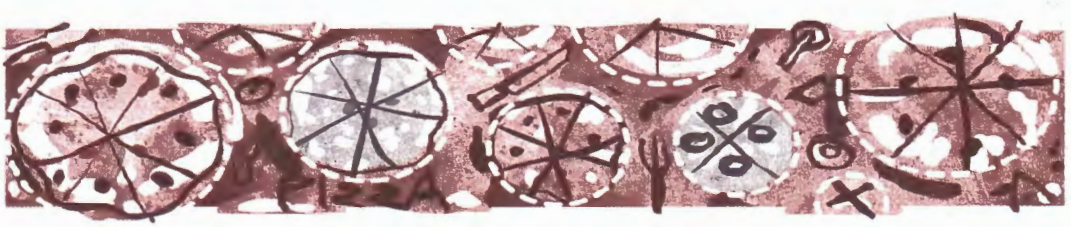
$$P(d) = \frac{3}{35}\left(d - \frac{77}{4}\right)^2 + \frac{4533}{560}$$

a) ¿Cuál es el precio de una pizza de 26 cm de diámetro?

b) ¿Y el de una pizza de 16 cm de diámetro?

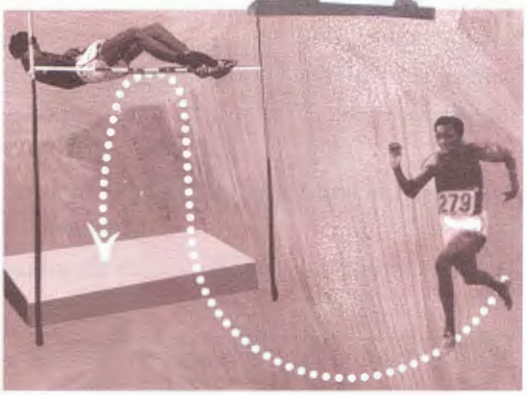
c) Si un cliente gastó en una pizza $18, ¿qué diámetro tenía?

d) Indiquen el dominio y la imagen de la función en este contexto.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Las parábolas y el atletismo



En las competencias de atletismo, el objetivo del salto en alto es sobrepasar, sin derribar, una barra horizontal (listón) que se encuentra suspendida entre dos soportes verticales. El participante tiene derecho a tres intentos para superar una misma altura. La mayoría de los saltadores de hoy en día usan el estilo de batida denominado *Fosbury flop*, denominado así en homenaje a su inventor, el saltador estadounidense Dick Fosbury, quien lo utilizó por primera vez en los Juegos Olímpicos de 1968.

30 En un intento por perfeccionar esta técnica y a fin de participar en olimpíadas deportivas intercolegiales, Juan realizó un salto en alto de la siguiente manera:
Se aproximó a la barra describiendo en su trayectoria una parábola; estableció, desde el pique hasta la ejecución, una distancia de 10 m y un desplazamiento máximo de 4 m, respecto de esta distancia.
Se giró en el despegue, a 0,30 m del plano vertical que contiene a la varilla horizontal, describió otra parábola y llegó a una altura máxima de 1,80 m.
Alcanzó la barra con la cabeza por delante, la superó de espaldas y cayó en la colchoneta sobre sus hombros.

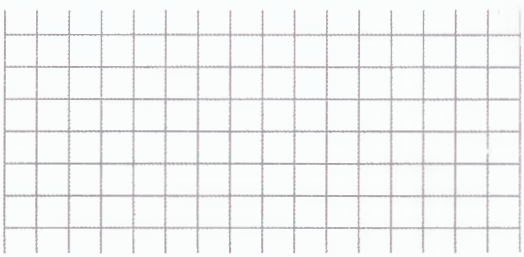
Tomen como referencia el origen de coordenadas y encuentren la fórmula de las dos funciones cuadráticas que muestran la trayectoria de Juan. Ayúdense con un gráfico.

.....

.....

.....

.....



31 La parábola que describió el lanzamiento de un atleta y que le permitió alcanzar la altura máxima a nivel mundial responde aproximadamente a la fórmula $h(x) = -\frac{6125}{1089}\ x(x-1{,}32)$ (h es la altura en metros, y x es el desplazamiento horizontal en metros).

a) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por el atleta?

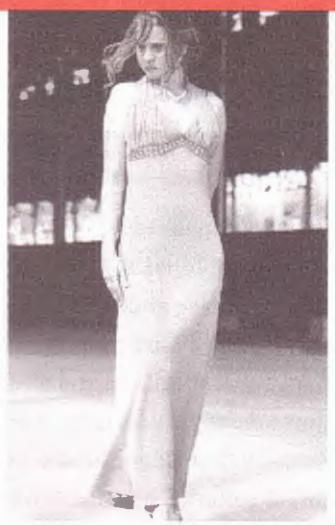
.....

b) ¿A qué distancia del plano vertical que contiene a la varilla horizontal, se giró para la ejecución?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El índice de masa corporal



32 Los médicos sostienen que el peso P de cada persona se relaciona con su estatura h, según la fórmula $P = a \cdot h^2$ donde a representa el *índice de masa corporal* (IMC).
Los nuevos criterios recomendados por la Organización Mundial de la Salud aconsejan, al menos, 18 como índice de masa corporal mínimo.

Consideran, además, que hay que tener un índice de entre 18 y 25 para tener buena salud; que una masa corporal menor a 18,5 indica "infrapeso"; más de 18,5 peso normal, y por encima de 25, sobrepeso u obesidad.

a) Escriban la fórmula que permite calcular el peso P de cada persona, en función de su altura h, para un IMC = 18.

.....

b) ¿Qué tipo de función es?

.....

c) Supongan que, para un desfile, solicitan modelos de entre 1,70 m, como mínimo, de estatura.

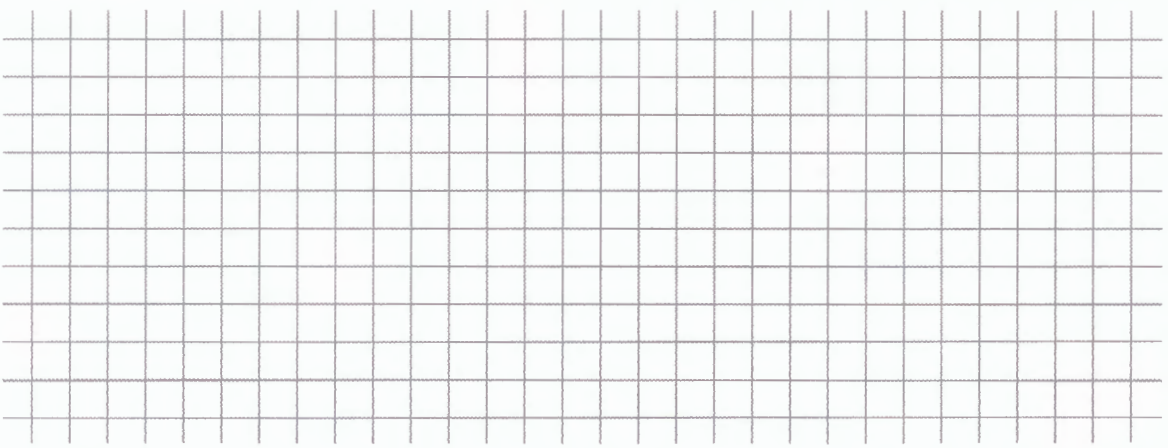
I. ¿Cuál es el peso mínimo que deben tener las modelos para estar saludables?

.....

II. Escriban el dominio y la imagen de la función encontrada en el contexto de este problema.

.....

III. Representen la función gráficamente.



IV. ¿Cuál es la estatura de una persona que tiene un IMC de 20 si su peso es de 61,25 kg?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

33 Realicen los cálculos necesarios e indiquen si los puntos (2; 9), (–7; 0) y (–10; 33) pertenecen a la gráfica de $f(x) = x^2 + 6x - 7$.

34 De las funciones f y g, se sabe que:
$f(x)$ es el cuadrado del siguiente de x disminuido en 4 unidades, y $g(x)$ es el producto entre el anterior de cada número entero x y el número aumentado en 3 unidades.

a) Escriban la expresión simbólica de f y de g.

b) Averigüen si f y g tienen la misma gráfica. Justifiquen.

35 Hallen, si es posible, los ceros de cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 121$

b) $f(x) = (x - 121)^2$

c) $f(x) = x^2 + 121$

d) $f(x) = x(x + 20)$

e) $f(x) = (x - 10)(x + 12)$

f) $f(x) = -3(x - 10)(x + 12)$

g) $f(x) = x^2 + 15x$

h) $f(x) = 3x^2 + 27x$

i) $f(x) = -x^2 + x$

36 Escriban las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

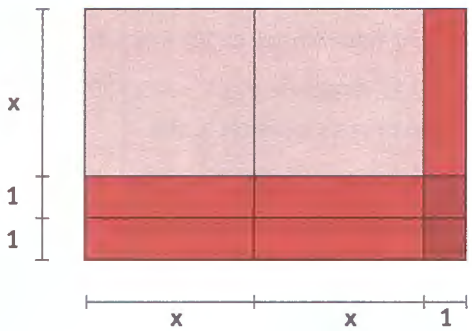
d) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

e) $f(x) = x^2 + 1$

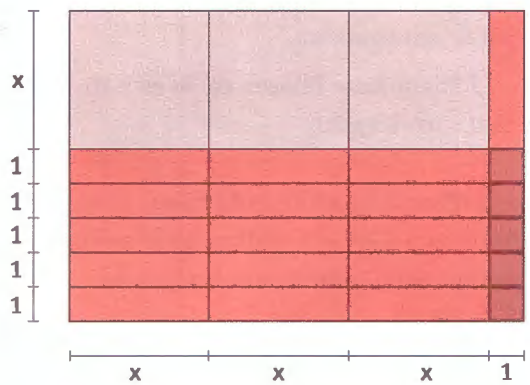
f) $f(x) = x^2 + x + 1$

37 Observen las siguientes figuras.

I.



II.



a) Expresen el área de cada una de ellas, al menos, de dos maneras distintas.

b) ¿Cuánto debe valer x, en cada caso, para que el área de la figura sea 5?

c) ¿Es posible que el área de la figura **I.** sea 1,9? ¿Por qué?

d) ¿Es posible que el área de la figura **II.** sea 4? ¿Por qué?

38 En una parábola que tiene eje de simetría $x = 4$, ¿cuál es el punto simétrico de (5; 0)? ¿Y el de (0; 0)?

39 En una parábola que tiene raíces $x = 3$ y $x = 11$, ¿cuáles son los simétricos de $x = -1$ y de $x = 12$?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

40 Escriban la fórmula de una función cuadrática que cumpla con la condición indicada, en cada caso:

a) f tiene vértice en V = (–5; –20).

b) El vértice de g es V = (–5; –20), y sus ramas están orientadas hacia arriba.

c) h tiene vértice V = (–5; –20); sus ramas están orientadas hacia arriba y son más "cerradas" que las de $g(x) = x^2$.

d) El vértice de j es V = (–5; –20) y contiene al punto (–4; 2).

e) k tiene vértice V = (–5; –20) y pasa por el origen de coordenadas.

f) El conjunto imagen de m es $[-20; +\infty)$ y $m(0) = m(-10) = 30$.

41 Para la función de fórmula $f(x) = (x - 12)^2 + 3$, hallen, si es posible, los valores del dominio cuya imagen es:

a) 28

b) 3

c) 2

42 Encuentren la fórmula de una función cuadrática que cumpla la condición indicada, en cada caso:

a) f corta al eje de las abscisas en –6 y en 2.

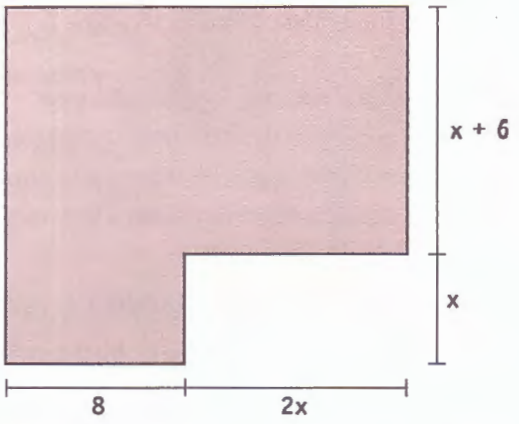
b) g corta al eje de las abscisas en –6 y en 2, y sus ramas están orientadas hacia abajo.

c) h corta al eje de las abscisas en –6 y en 2; sus ramas están orientadas hacia abajo y están más cerradas respecto de $g(x) = x^2$.

d) k corta al eje de las abscisas en –6 y en 2, y contiene al punto (–4; 2).

e) l corta al eje de las abscisas en –6 y en 2, y su ordenada al origen es –12.

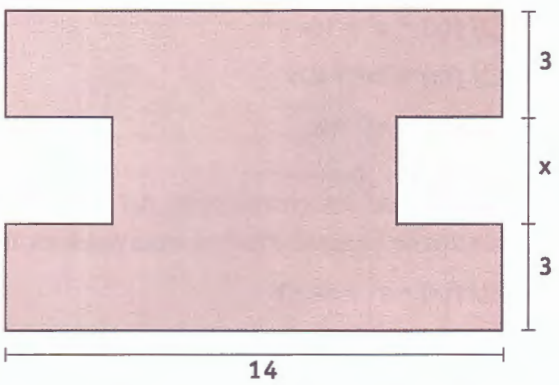
43 Observen la figura siguiente en la que se indican las medidas en centímetros.



a) Encuentren una expresión que determine el área A de la figura en función de x.

b) Hallen el perímetro de la figura, si su área es 238 cm^2.

44 Observen la figura, que representa un cartón rectangular del que se recortaron dos cuadrados iguales. Las indicaciones corresponden a medidas en centímetros.



a) Encuentren una expresión que determine el área A del cartón en función de x.

b) Determinen el ancho del cartón antes de ser cortado, si el área de color es 108 cm^2.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

45 Sin realizar la gráfica de ninguna función, identifiquen entre las siguientes afirmaciones las que son falsas. Consideren para ello las funciones f, g, h, p, q y r cuyas fórmulas se indican.

$f(x) = x^2$ $\quad$ $p(x) = 5(x-2)^2 + 2$

$g(x) = 2x^2$ $\quad$ $q(x) = \frac{1}{5}x^2$

$h(x) = -5(x-1)^2$ $\quad$ $r(x) = (x+7)^2$

Respecto de la gráfica de f:

a) La de g tiene el mismo vértice.

b) La gráfica de r está desplazada 7 unidades hacia la derecha.

c) La de h está desplazada horizontalmente una unidad hacia la derecha y sus ramas van hacia abajo.

d) La de q es más "abierta" respecto del eje y.

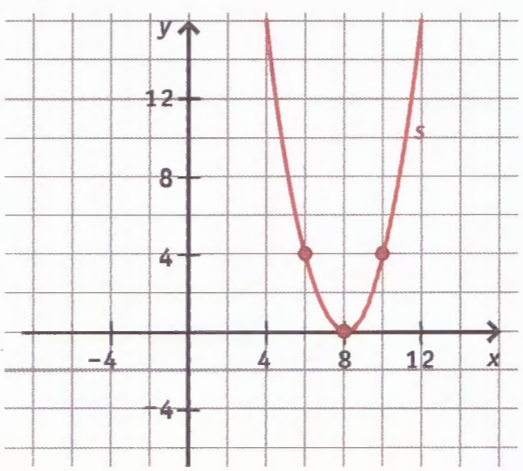
e) La de p está desplazada 7 unidades hacia la derecha.

f) La de q tiene el mismo eje de simetría.

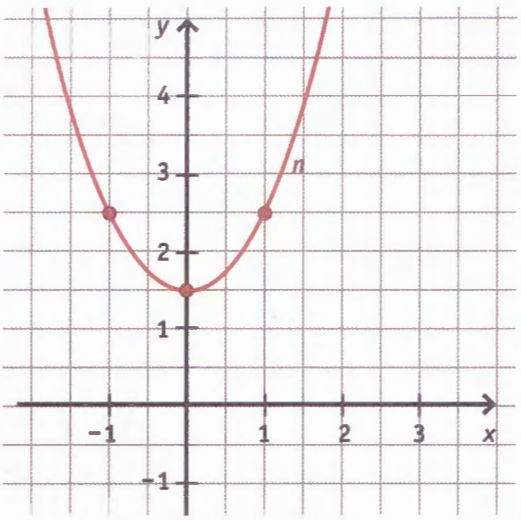
g) La de h es más "cerrada" respecto del eje y.

46 Observen la gráfica y escriban la fórmula de cada función.

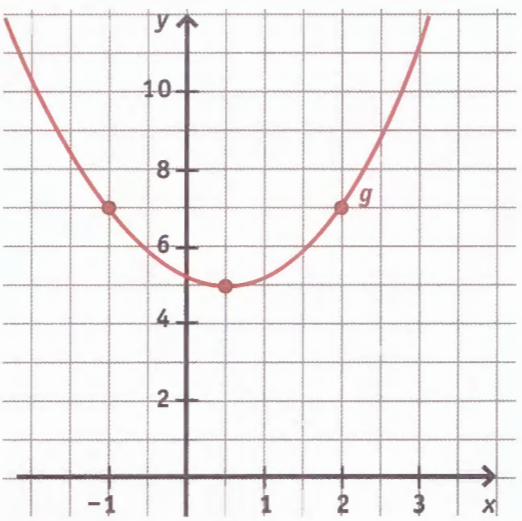
a)



b)



c)



47 Para cada una de las funciones de la actividad anterior, indiquen:

a) Coordenadas del vértice.

b) Conjunto imagen.

c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d) C^+, C^- y C^0.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 Se puede afirmar que, para la función de fórmula $f(x) = (6x-1)^2-(2x+3)^2$:

a) El eje de simetría es $x=\frac{8}{3}$.

b) La gráfica tiene un solo punto de contacto con el eje x.

c) El vértice está en el cuarto cuadrante.

d) $C^- = (-\infty; -0{,}25) \cup (1; +\infty)$.

2 La expresión $2y + 4 = (x-2)^2$:

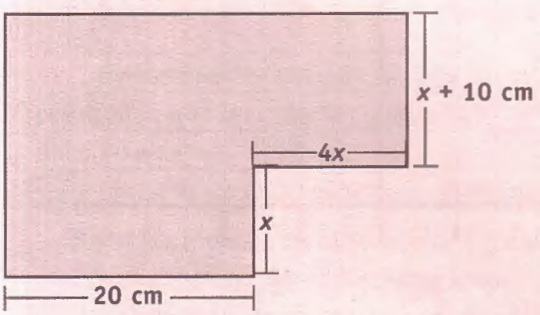
a) Representa puntos del plano con ordenadas mayores o iguales que –2.

b) Corresponde a una parábola con ramas descendentes.

c) Representa una función que tiene un mínimo local en $x = -2$.

d) Ninguna de las anteriores.

3 Para la siguiente figura:



a) La expresión que representa el área es: $A = 4x^2 + 40x + 200$.

b) Si su área es 700 cm^2, su perímetro es 100 cm.

c) Si su perímetro es 96 cm, su área es 476 cm^2.

d) Ninguna de las anteriores.

4 Si el vértice de una parábola es el punto (3; –2) y el coeficiente principal de su fórmula es –2, entonces:

a) el conjunto imagen es $[3; +\infty)$.

b) tiene un solo cero.

c) tiene ordenada al origen –10.

d) es creciente en $(-\infty; 3]$.

5 Las funciones g, l y m responden a las fórmulas:

$g(x) = -3(x-1)^2 + 5$

$l(x) = -x^2 + 3x - 2$

$m(x) = 2x^2 - 8x + 6$

De ellas puede afirmarse que:

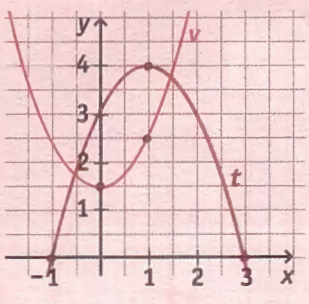
a) g y l tienen la misma ordenada al origen.

b) $g(2) > l(2)$.

c) las gráficas de l y de m no tienen puntos en común.

d) m no tiene ceros.

6 En el gráfico, se han representado las funciones v y t.



a) (1,75; –0,5) es un punto común a ambas gráficas.

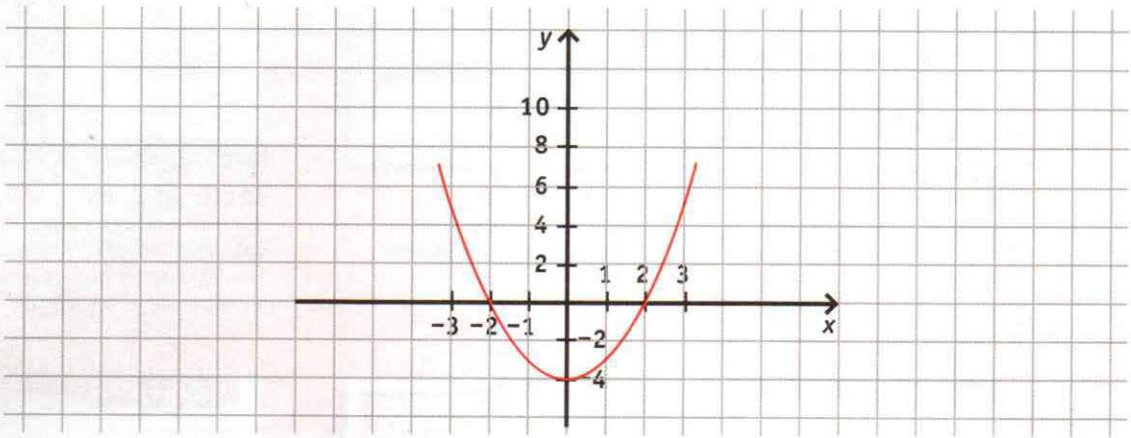
b) Las dos formas polinómicas tienen el mismo coeficiente principal.

c) $y = 3{,}75$ es la ordenada de uno de los puntos comunes a ambas gráficas.

d) Ninguna de las anteriores.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

En el siguiente plano cartesiano, se ha graficado la función cuadrática *f*.



1 Escriban la fórmula de *f*.

.....

2 Representen en el mismo gráfico las funciones *g* y *h*, tales que: $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8$ y $h(x) = -3$.

3 Hallen las coordenadas de los puntos A y B, en los que se intersecan las gráficas de *f* y de *h*.

.....

4 Hallen las coordenadas de los puntos C y D en los que se intersecan las gráficas de *g* y de *f*.

.....

.....

.....

5 Clasifiquen el cuadrilátero ABCD y calculen su área.

.....

6 Escriban un sistema de inecuaciones lineales que tenga como conjunto solución al cuadrilátero ABCD.

.....

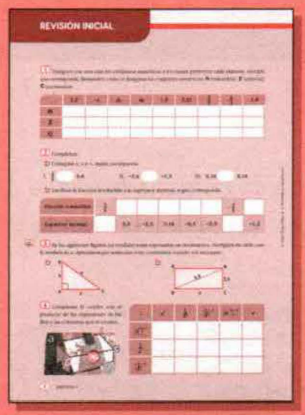
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

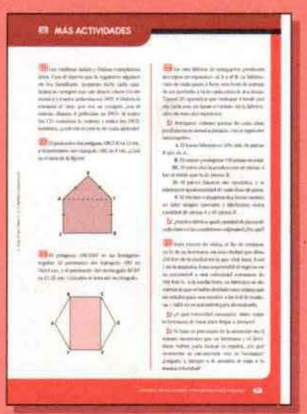
Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una presentación general del tema es el eje que abre cada capítulo.

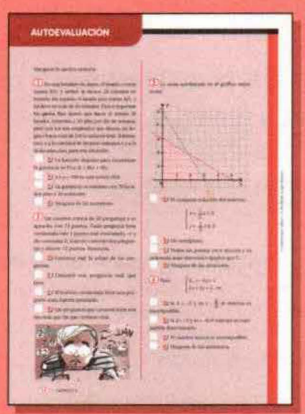


Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

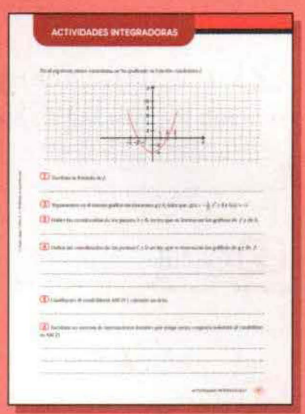
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados con aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



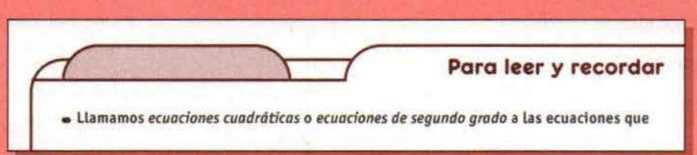
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



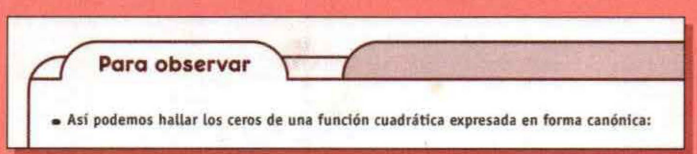
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 3 y 4, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE